ΑΣΚΗΣΗ
(Εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης Euler)

Να επιλυθεί η διαφορική εξίσωση:

$$x^2y'' + 2xy' - 6y = 0, \qquad x > 0 \quad (1)$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι η (1) είναι Δ.Ε. της μορφής Euler. Θέτουμε:

$$x = e^t, \qquad x > 0 \quad (2)$$

και παίρνουμε:

$$y(x) = y(e^t) = u(t)$$

Επίσης έχουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \overset{(2)}{=} u'(t) \cdot \frac{1}{e^t}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt} \cdot \left(u'(t) \cdot \frac{1}{e^t} \right) \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{u''(t)e^t - u'(t)e^t}{e^{2t}} \cdot \frac{1}{e^t} = \frac{u''(t) - u'(t)}{e^{2t}}$$

Οπότε η Δ.Ε. (1) από τις προηγούμενες σχέσεις γίνεται:

$$e^{2t} \cdot \frac{u''(t) - u'(t)}{e^{2t}} + 2e^t \cdot \frac{u'(t)}{e^t} - 6u(t) = 0 \qquad \Rightarrow$$

$$u''(t) - u'(t) + 2u'(t) - 6u(t) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{u''(t) + u'(t) - 6u(t) = 0} \quad (3)$$

Η (3) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\begin{matrix} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = -3 \end{matrix}} \text{ απλές ρίζες}$$

Οπότε η γενική λύση είναι:

$$\boxed{u(t) = c_1 \cdot e^{2t} + c_2 \cdot e^{-3t}}$$

Τέλος με την αντικατάσταση $t = \ell n x$ παίρνουμε τη γενική λύση της (1):

$$\boxed{y(x) = c_1 \cdot x^2 + c_2 \cdot x^{-3}}$$

Βλέπε τυπολόγιο: «Διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης και ανώτερης»
Μεθοδολογία: Βιβλίο Ι.Π. Κρόκου «Διαφορικές εξισώσεις» σελ. 113 – 116, 121- 123 και λυμένα θέματα 11, 12 σελ. 132 – 134.

ΑΣΚΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ