ΑΣΚΗΣΗ
(Εύρεση της γενικής λύσης διαφορικής εξίσωσης Euler)

Να βρεθεί η γενική λύση της Δ.Ε.:

$$(2x+1)^2 y'' + 6(2x+1)y' + 4y = 0, \qquad 2x+1>0 \qquad (1)$$

ΥΠΟΔΕΙΓΜΑΤΙΚΗ ΛΥΣΗ

Παρατηρούμε ότι η (1) είναι Δ.Ε. της μορφής Euler. Θέτουμε:

$$2x+1 = e^t \quad \Rightarrow \quad 2x = e^t - 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = \frac{e^t-1}{2}} \quad (2)$$

και παίρνουμε:

$$y(x) = y\left(\frac{e^t-1}{2}\right) = u(t)$$

Επίσης έχουμε:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} \overset{(2)}{=} u'(t)\cdot\frac{2}{e^t}$$

$$y''(x) = \frac{d}{dt}\left(u'(t)\cdot\frac{2}{e^t}\right)\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{2u''(t)\cdot e^t - 2u'(t)\cdot e^t}{e^{2t}}\cdot\frac{2}{e^t} = 4\cdot\frac{u''(t)-u'(t)}{e^{2t}}$$

Οπότε η Δ.Ε. (1) από τις προηγούμενες σχέσεις γίνεται:

$$4e^{2t}\frac{u''(t)-u'(t)}{e^{2t}} + 6\cdot e^t\cdot u'(t)\cdot\frac{2}{e^t} + 4u(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$u''(t) - u'(t) + 3u'(t) + u(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u''(t) + 2u'(t) + u(t) = 0} \quad (3)$$

Η (3) είναι ομογενής γραμμική Δ.Ε. $2^{ης}$ τάξης με σταθερούς συντελεστές. Η χαρακτηριστική εξίσωση είναι:

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda+1)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\lambda = -1} \text{ διπλή ρίζα}$$

Οπότε η γενική λύση είναι:

$$\boxed{u(t) = c_1\cdot e^{-t} + c_2\cdot t\cdot e^{-t}}$$

Τέλος με την αντικατάσταση $t = \ell n(2x+1)$ παίρνουμε τη γενική λύση της (1):

$$\boxed{y(x) = c_1\cdot\frac{1}{2x+1} + c_2\cdot\frac{\ell n(2x+1)}{2x+1}}$$

ΑΡΝΟΣ Studies & Publishing
ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ

Βλέπε τυπολόγιο: «Διαφορικές εξισώσεις $2^{ης}$ τάξης και ανώτερης»
Μεθοδολογία: Βιβλίο Ι.Π. Κρόκου «Διαφορικές εξισώσεις» σελ. 113 – 116, 121- 123 και λυμένα θέματα 11, 12 σελ. 132 – 134.

ΑΣΚΗΣΗ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΣΥΣΤΗΜΑΤΩΝ

ΣΟΛΩΜΟΥ 29 ΑΘΗΝΑ ☎ 210.38.22.157 – 495
www.arnos.gr – e-mail : info@arnos.gr
ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΕΝΗ ΣΤΗΡΙΞΗ ΦΟΙΤΗΤΩΝ