ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

I.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε το γράμμα *Α*, αν ο ισχυρισμός είναι αληθής και το γράμμα *Ψ*, αν ο ισχυρισμός είναι ψευδής δικαιολογώντας συγχρόνως την απάντησή σας.

1. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}(f(x)+g(x))dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

2. Ισχύει $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)\cdot g(x)dx=\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\cdot\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$ Α Ψ

3. Αν $\alpha=\beta$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$. Α Ψ

4. Αν $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x)=0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$. Α Ψ

5. Αν $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta}f(x)dx\geq 0$. Α Ψ

6. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx \geq 0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι $f(x) \geq 0$ για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$. Α Ψ

7. $\int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+1)dx < \int_{-\alpha}^{\alpha} (x^4+x^2+1)dx$, για κάθε $\alpha > 0$. Α Ψ

8. $\int_0^{\pi/4} \ln(1-\eta\mu^2 x)dx = 2\int_0^{\pi/4} \ln \sigma\upsilon\nu x dx$. Α Ψ

9. $\int f(x)dx = xf(x) - \int xf'(x)dx$. Α Ψ

10. $\int_1^e \ln x dx = \int_e^1 \ln\frac{1}{t}\, dt$. Α Ψ

11. Αν $\int_0^1 (f(x)-1)dx = 0$ τότε $\bar{f} = 1$. Α Ψ

12. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$, τότε $f(\xi) = 0$ για κάποιο $\xi \in (\alpha, \beta)$. Α Ψ

13. Αν $\int_\alpha^\beta f(x)dx = 0$ και η f δεν είναι παντού μηδέν στο $[\alpha, \beta]$, τότε η f παίρνει δυο, τουλάχιστον, ετερόσημες τιμές. Α Ψ

14. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^1 (x^3 - x)dx$ παριστάνει το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^3 - x$ και τον άξονα των x. Α Ψ

II.

Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να κυκλώσετε τη σωστή απάντηση

1. Αν $f'(x) = \eta\mu\pi x$ και $f(0) = 0$, τότε το $f(1)$ ισούται με

Α) $-\frac{1}{\pi}$, Β) $\frac{1}{\pi}$, Γ) $\frac{-2}{\pi}$, Δ) $\frac{2}{\pi}$.

2. Το ολοκλήρωμα $\int \frac{1}{4-x}dx$ στο $(4,+\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\ln(4-x)+c$, Β) $-\ln(4-x)+c$,

Γ) $\ln(x-4)+c$, Δ) $-\ln(x-4)+c$.

3. Το ολοκλήρωμα $\int \left(x-\frac{1}{x}\right)^2 dx$ στο $(0,+\infty)$ είναι ίσο με

Α) $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}+c$, Β) $2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,

Γ) $\frac{(1-\ln x)^3}{3}+c$, Δ) $\frac{x^3}{3}-\frac{1}{x}-2x+c$,

Ε) $\frac{\left(x-\frac{1}{x}\right)^3}{3}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)+c$.

4. Το ολοκλήρωμα $\int_{-1}^{1}|x^2-1|dx$ είναι ίσο με

Α) $\frac{4}{3}$, Β) 0, Γ) $-\frac{4}{3}$, Δ) $\frac{2}{3}$, Ε) $\frac{5}{3}$.

5. Το ολοκλήρωμα $\int \ln x dx$ είναι ίσο με

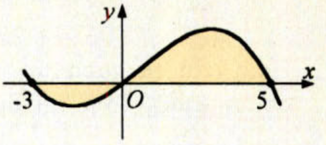
Α) $\frac{1}{x}+c$, Β) $\frac{\ln^2 x}{2}+c$, Γ) $x(\ln x-1)+c$, Δ) $\frac{\ln^3 x}{3}+c$.

6. Έστω f,g δυο παραγωγίσιμες συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους στο $[\alpha,\beta]$. Αν $f(x)\le g(x)$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$, τότε κατ' ανάγκη θα ισχύει:

Α) $f'(x)\le g'(x)$, $x\in[\alpha,\beta]$, Β) $\int_\alpha^\beta f(x)dx \le \int_\alpha^\beta g(x)dx$

Γ) $\int f(x)dx \le \int g(x)dx$, $x\in[\alpha,\beta]$, Δ) $\int_\beta^\alpha f(x)dx \le \int_\beta^\alpha g(x)dx$.

7. Το εμβαδόν του γραμμοσκιασμένου χωρίου του διπλανού σχήματος είναι ίσο με



Α) $\int_{-3}^{5} f(x)dx$, Β) $\int_{5}^{-3} f(x)dx$.

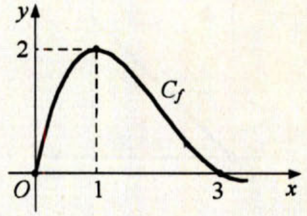
Γ) $\int_{-3}^{0} f(x)dx - \int_{0}^{5} f(x)dx$, Δ) $-\int_{-3}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{5} f(x)dx$.

8. Αν $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in [-1,1]$ και $f(0) = g(0) + 2$, τότε για κάθε $x \in [-1,1]$ ισχύει:

Α) $f(x) = g(x) - 2$, Β) $\int_{-1}^{1} (f(x) - g(x))dx = 4$.

Γ) $f(x) \le g(x)$, $x \in [-1,1]$ Δ) Οι C_f, C_g έχουν κοινό σημείο στο $[-1,1]$.

9. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{1}^{x} f(t)dt$ όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε η $F'(1)$ είναι ίση με

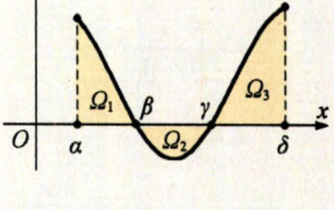


Α) 0, Β) 1, Γ) 2, Δ) $\frac{1}{2}$.

10. Έστω η συνάρτηση f του διπλανού σχήματος. Αν

$E(\Omega_1) = 2$, $E(\Omega_2) = 1$ και $E(\Omega_3) = 3$

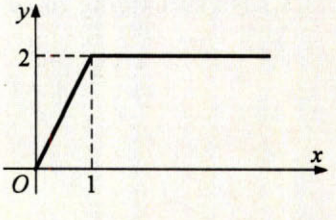
τότε το $\int_{\alpha}^{\delta} f(x)dx$ είναι ίσο με



Α) 6, Β) –4, Γ) 4,

Δ) 0, Ε) 2.

11. Έστω η συνάρτηση $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)dt$, όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Τότε



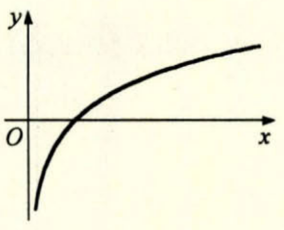
Α) $F(x) = x^2$,

Β) $F(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x < 1 \\ 2, & 1 \le x \end{cases}$,

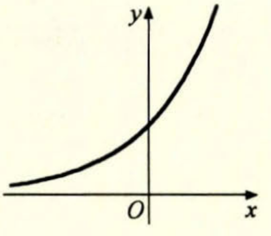
Γ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x, & 1 \le x \end{cases}$, Δ) $F(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x < 1 \\ 2x-1, & 1 \le x \end{cases}$.

III.

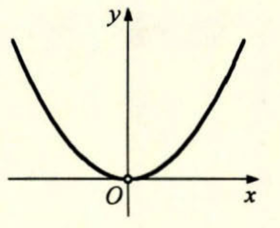
1. Ποιο από τα παρακάτω σχήματα αντιπροσωπεύει τη γραφική παράσταση μιας λύσης της διαφορικής εξίσωσης $xy' = y$, με $x, y > 0$.



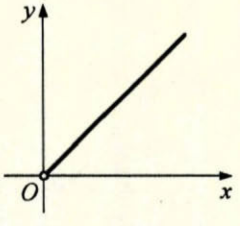
(A)



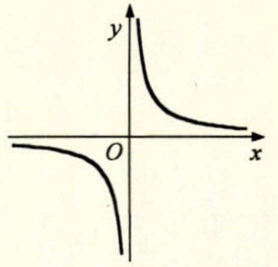
(B)



(Γ)



(Δ)



(Ε)

2. Ποια από τα παρακάτω ολοκληρώματα είναι καλώς ορισμένα;

Α) $\int_0^1 \frac{1}{x-1}dx$, Β) $\int_0^{\pi/2} \eta\mu x dx$, Γ) $\int_0^{\pi} \varepsilon\varphi x dx$

Δ) $\int_0^1 \ln x dx$, Ε) $\int_0^2 \sqrt{1-x^2}\,dx$, Δ) $\int_0^1 \frac{1}{x+1}dx$.

3. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις:

$$\int \frac{1}{x}dx = \int (x)'\frac{1}{x}dx = x\cdot\frac{1}{x} - \int x\left(\frac{1}{x}\right)' dx$$

$$= 1 - \int x\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx$$

$$= 1 + \int \frac{1}{x}dx.$$

Άρα $\int \frac{1}{x}dx = 1 + \int \frac{1}{x}dx$, οπότε $0 = 1$!

4. Να εντοπίσετε το λάθος στις παρακάτω πράξεις

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+\frac{1}{u^2}}\cdot\left(-\frac{1}{u^2}\right)du$$

$$=-\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+u^2}du=-I. \qquad \text{(Θέσαμε } x=\frac{1}{u} \text{ οπότε } dx=-\frac{1}{u^2}du\text{)}.$$

Άρα $I=-I$ οπότε $I=0$. Αυτό, όμως, είναι άτοπο, αφού

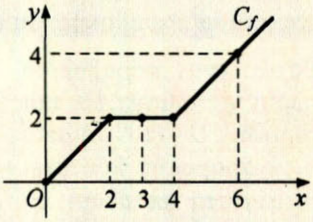
$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{1+x^2}dx>0,$$

επειδή $\frac{1}{1+x^2}>0$ για κάθε $x\in[-1,1]$.

5. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$F(x)=\int_0^x f(t)dt,$$

όπου f η συνάρτηση του διπλανού σχήματος. Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά.



$F(0)=\square$, $F(2)=\square$, $F(3)=\square$, $F(4)=\square$, $F(6)=\square$.