

**ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΜΠ ΗΛΕΚΤΡΟΛΟΓΩΝ**  
 (2006/2007-Φυλλάδιο 2-Επίλυση της διαφορικής εξίσωσης Euler με μετασχηματισμό)

Να λυθεί η παρακάτω διαφορική εξίσωση:

$$(1) \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$$

**Υποδειγματική Λύση**

$$(1) \quad x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$$

Η εξίσωση (1) είναι μια διαφορική εξίσωση Euler. Μια τέτοια εξίσωση λύνετε μέσω του μετασχηματισμού :

$$x = e^t \quad \rightarrow \quad dx = e^t dt \quad (2)$$

Ακόμα

$$y(x) = y(e^t) = Y(t) \quad \rightarrow \quad y = Y \quad (3)$$

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{dY}{dx} = \frac{dY}{dt} \frac{dt}{dx} = Y' e^{-t} \quad \rightarrow \quad y' = Y' e^{-t} \quad (4)$$

$$y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d\left(\frac{dy}{dx}\right)}{dx} = \frac{d(Y' e^{-t})}{dx} = \frac{d(Y' e^{-t})}{dt} \frac{dt}{dx} = (Y'' e^{-t} - Y' e^{-t}) e^{-t} \quad \rightarrow$$

$$y'' = (Y'' - Y') e^{-2t} \quad (5)$$

Επομένως η (1) από (2),(3),(4),(5) γίνεται :

$$x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0 \quad \rightarrow$$

$$e^{2t} (Y'' - Y') e^{-2t} - 4e^t Y' e^{-t} + 4Y = 0 \quad \rightarrow$$

$$Y'' - 5Y' + 4Y = 0$$

Με χαρακτηριστική εξίσωση :

$$k^2 - 5k + 4 = 0 \quad \text{και ρίζες } k_1 = 1 \quad \text{και } k_2 = 4. \text{ Επομένως :}$$

$$(6) \quad Y = c_1 e^t + c_2 e^{4t}$$

Και με αντικατάσταση της (2) :

$$y = c_1 x + c_2 x^4$$