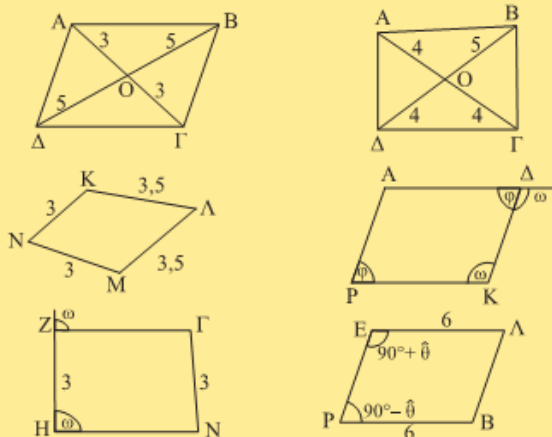


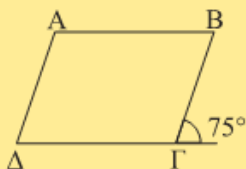
## Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;

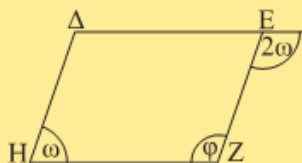


2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα;

3. Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.



4. Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\omega$  και  $\varphi$  του παραλληλογράμμου  $\Delta EZH$ .



το  $AG$ ) και  $MD \parallel AG$  ( $\Delta$  σημείο του  $AB$ ). Να αποδείξετε ότι  $MD + ME = AB$ .

2. Δίνεται παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  και  $E$  σημείο της  $AG$ . Φέρουμε  $DZ \parallel BE$  ( $Z$  σημείο του  $AG$ ). Να αποδείξετε ότι  $\Delta E \parallel BZ$ .

3. Δίνεται παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε τη  $\Delta\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma E = \Delta\Gamma$  και τη  $\Delta A$  κατά τμήμα  $AZ = \Delta A$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Z, B$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στις προεκτάσεις των διαμέσων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  παίρνουμε σημεία  $H$  και  $Z$  αντίστοιχα τέτοια, ώστε  $\Delta H = B\Delta$  και  $ZE = \Gamma E$ . Να αποδείξετε ότι i)  $AH = AZ$ ,

ii) τα σημεία  $Z, A$  και  $H$  είναι συνευθειακά.

5. Από σημείο  $A$  να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα  $\lambda$ .

## Σύνθετα θέματα

5. Δίνεται παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$  και τα σημεία  $E, Z, H$  και  $K$  των πλευρών του  $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta$  και  $\Delta\Delta$  αντίστοι-

5. Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμα αν:

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες.

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες.

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες.

(Σημειώστε  $x$  σε κάθε σωστή πρόταση).

## Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$ . Η διχοτόμος της  $\hat{A}$  τέμνει τη  $\Delta\Gamma$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι  $\Delta E = B\Gamma$ .

2. Έστω  $O$  το κέντρο παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Αν  $E$  και  $Z$  σημεία των  $OA$  και  $OG$  αντίστοιχα, ώστε  $OE = OZ$ , να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $BE\Delta Z$  είναι παραλληλόγραμμα.

3. Έστω  $E$  και  $Z$ , τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι: i) το τετράπλευρο  $AE\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμα. ii) οι  $AG, B\Delta$  και  $EZ$  συντρέχουν.

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διχοτόμος του  $\Delta A$ . Η παράλληλη από το  $\Delta$  προς την  $AB$  τέμνει την  $AG$  στο  $E$ . Αν η παράλληλη από το  $E$  προς τη  $B\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $AE = BZ$ .

## Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $M$  της βάσης του  $B\Gamma$ . Φέρουμε  $ME \parallel AB$  ( $E$  σημείο  $χα$ , ώστε  $AE = \Gamma H$  και  $BZ = \Delta K$ . Να αποδείξετε ότι i) το τετράπλευρο  $EZH K$  είναι παραλληλόγραμμα, ii) οι  $AG, B\Delta, EH$  και  $KZ$  συντρέχουν.

2. Προεκτείνουμε την πλευρά  $AB$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  κατά τμήμα  $BE = B\Gamma$  και επί της ημιευθείας  $\Delta A$  θεωρούμε σημείο  $Z$ , ώστε  $\Delta Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι  $\hat{Z}\hat{\Gamma}\hat{E} = 90^\circ$ .

3. Δίνεται παραλληλόγραμμα  $AB\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = B\Gamma$  και την  $\Delta\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z = \Delta\Gamma$ . Να αποδείξετε ότι τα σημεία  $Z, \Gamma$  και  $E$  είναι συνευθειακά.

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ) και σημείο  $\Delta$  της  $AG$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = \Gamma\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η  $B\Gamma$  διχοτομεί τη  $\Delta E$ .

5. Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;