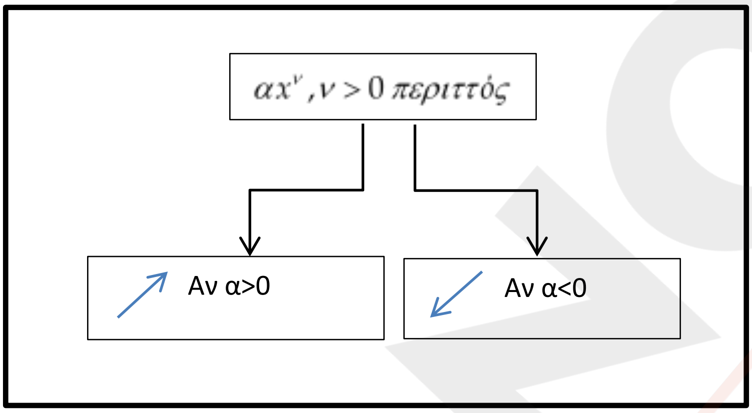
Μονοτονία Συνάρτησης

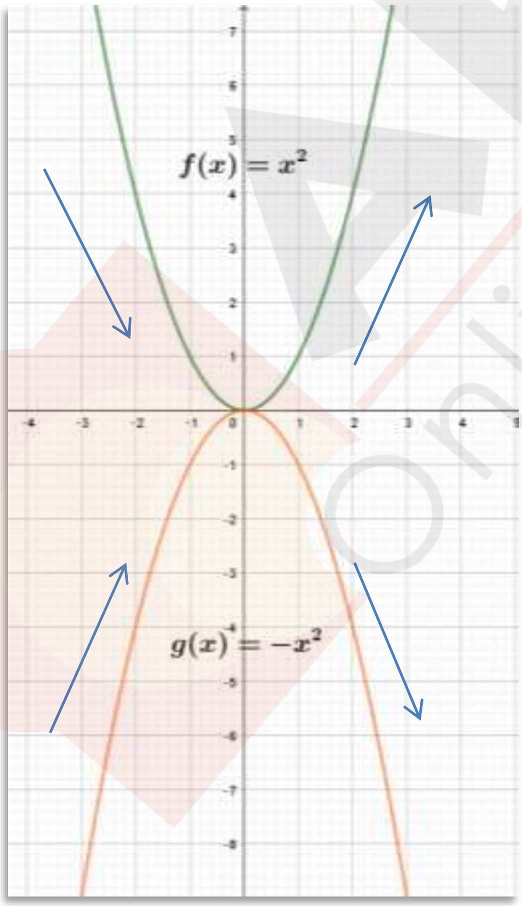
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

Α) Πριν την μονοτονία βρίσκουμε πάντα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

Β)



Γ) Αν η συνάρτηση έχει απόλυτα και ζητούμε την μελέτη της μονοτονίας, πάντα γράφουμε την συνάρτηση χωρίς απόλυτα και μελετούμε την μονοτονία στα διαστήματα που αλλάζει τύπο η συνάρτηση f.



Μελέτη μονοτονίας της $f(x) = x^2, A_f = R$

Στο σημείο $x_o = 0$ η f αλλάζει μονοτονία.

- $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με $x_1 < x_2$
$\Leftrightarrow x_1{}^2 > x_2{}^2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα $\forall x \in \Delta_1$

- $\Delta_2 = [0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_2$ με $x_1 < x_2$
$\Leftrightarrow x_1{}^2 < x_2{}^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα $\forall x \in \Delta_2$

Μελέτη μονοτονίας της $g(x) = -x^2$

Στο σημείο $x_o = 0$ η f αλλάζει μονοτονία.

- $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1{}^2 > x_2{}^2 \Leftrightarrow -x_1{}^2 < -x_2{}^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

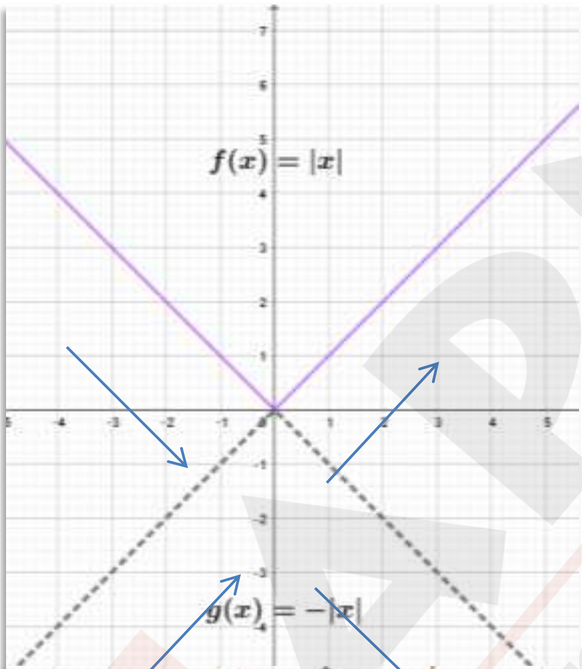
Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα $\forall x \in \Delta_1$

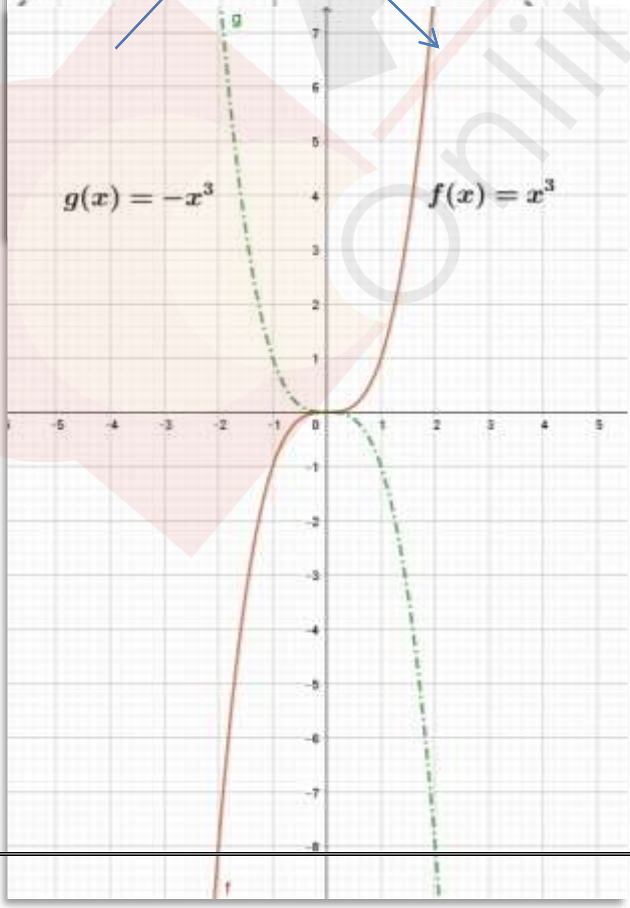
- $\Delta_2 = [0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_2$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^2 < x_1^2 \Leftrightarrow -x_1^2 < -x_2^2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα $\forall x \in \Delta_2$





Μελέτη μονοτονίας της $f(x) = |x|$, $A_f = R$

(Αν η συνάρτηση έχει απόλυτα πάντα βγαίνει το απόλυτο για την μελέτη της μονοτονίας)

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

Η μονοτονία αλλάζει στο σημείο x=0.

- $\Delta_1 = (-\infty, 0]$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow -x_1 > -x_2 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα $\forall x \in \Delta_1$

- $\Delta_2 = [0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα $\forall x \in \Delta_2$

Μελέτη μονοτονίας της $f(x) = x^3$, $A_f = R$

Η $f(x)=x^3$ διατηρεί σταθερή την μονοτονία της.

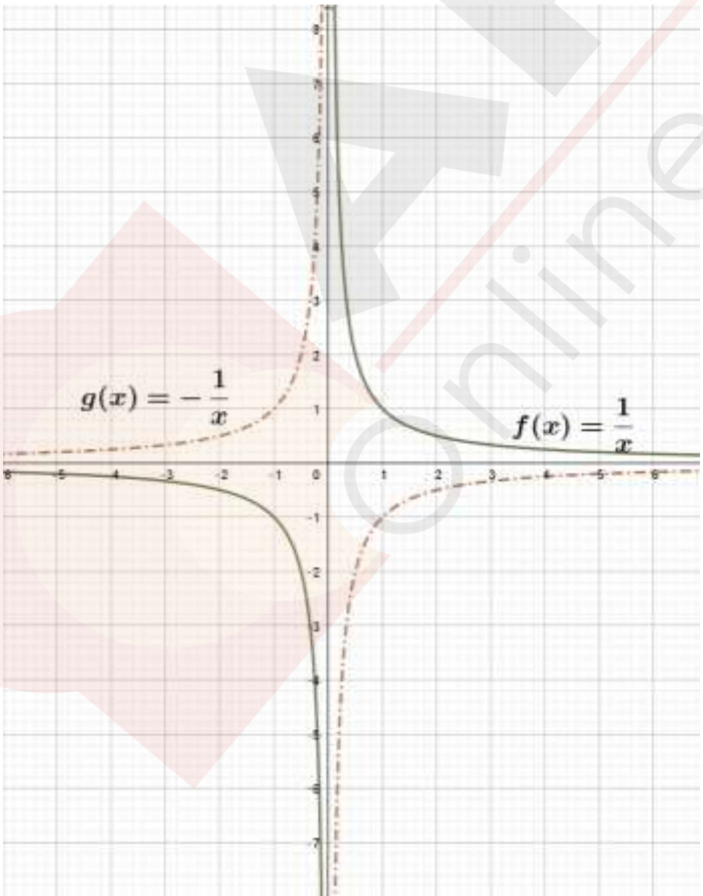
Αν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα $\forall x \in R$

Μελέτη μονοτονίας της $f(x)=-x^3, A_f = R$

Αν $x_1, x_2 \in R$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^3 < x_2^3 \Leftrightarrow -x_1^3 > -x_2^3 \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα $\forall x \in R$



Μελέτη μονοτονίας

$f(x)=\frac{1}{x}, A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

- $\Delta_1 = (-\infty, 0)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

- $\Delta_2 = (0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \frac{1}{x_1} > \frac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. Φθίνουσα ανά διαστήματα.

Μελέτη μονοτονίας

$f(x)=-\frac{1}{x}, A_f = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$

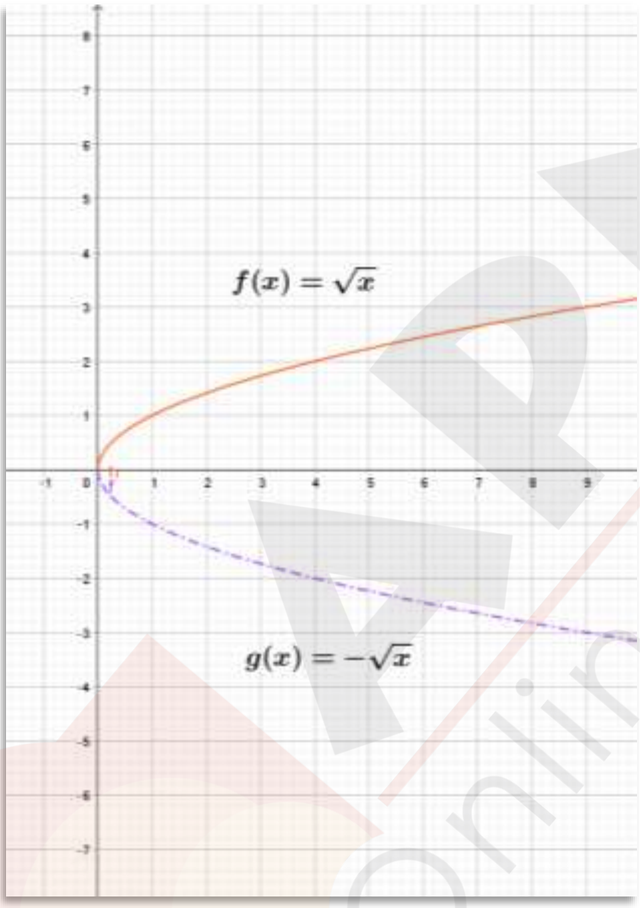
- $\Delta_1 = (-\infty, 0)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με $x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

- $\Delta_2 = (0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in \Delta_1$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$



Μελέτη μονοτονίας

$f(x) = \sqrt{x}$, $A_f = [0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in A_f$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

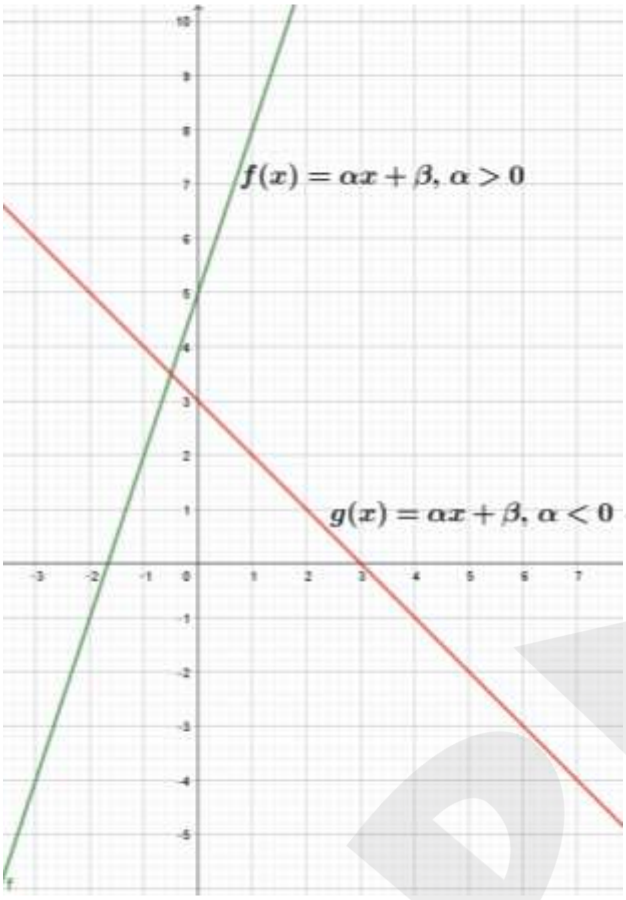
Μελέτη μονοτονίας

$f(x) = -\sqrt{x}$, $A_f = [0, +\infty)$

Αν $x_1, x_2 \in A_f$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2} \Leftrightarrow -\sqrt{x_1} > -\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.



Μελέτη μονοτονίας

$f(x) = \alpha x + \beta, \alpha > 0, \mathrm{A}_f = R$

Αν $x_1, x_2 \in A_f$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot x_1 < \alpha \cdot x_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot x_1 + \beta < \alpha \cdot x_2 + \beta \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Μελέτη μονοτονίας

$f(x) = \alpha x + \beta, \alpha < 0, \mathrm{A}_f = R$

Αν $x_1, x_2 \in A_f$ με

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot x_1 < \alpha \cdot x_2 \Leftrightarrow \alpha \cdot x_1 + \beta < \alpha \cdot x_2 + \beta \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο πεδίο ορισμού της.

Έστω συνάρτηση $f(x) = x^3 - \dfrac{1}{x} + \sqrt{x}$. Να μελετηθεί η μονοτονία της στο πεδίο ορισμού της

Λύση:

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το (0,+ ∞)

Έστω $x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in (0, +\infty)$ τότε ισχύει ότι

$x_1^{\ 3} < x_2^{\ 3}$ (1)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x_1} > \dfrac{1}{x_2} \Leftrightarrow -\dfrac{1}{x_1} < -\dfrac{1}{x_2}$ (2)

$x_1 < x_2 \Leftrightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ (3)

Με πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1),(2),(3) καταλήγουμε στο εξής:

$$x_1 < x_2 \Leftrightarrow x_1^{\ 3} - \frac{1}{x_1} + \sqrt{x_1} < x_2^{\ 3} - \frac{1}{x_2}\sqrt{x_2} \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της.

Έστω συνάρτηση f η οποία είναι γνησίως φθίνουσα στο R, και το γράφημά της διέρχεται από το σημείο (1,3), να λυθεί η ανίσωση $f(x+2) < 3$

Λύση:

$$f(x+2) < 3 \Leftrightarrow f(x+2) < f(1) \overset{f \searrow}{\Leftrightarrow} x+2 > 1 \Leftrightarrow x > -1$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = x^3 + 2x - 3$ είναι γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της και να λύσετε την εξίσωση $x^3 + 2x - 3 = 0$ και στην συνέχεια να λύσετε την ανίσωση $x^3 + 2x - 3 > 0$

Λύση:

Η f έχει πεδίο ορισμού $A_f = \mathbb{R}$ ως πολυωνυμική.

Έστω $x_1 < x_2, \quad x_1, x_2 \in R$ τότε ισχύει ότι:

$x_1^{\ 3} < x_2^{\ 3}$ (1)

$2x_1 < 2x_2 \Leftrightarrow 2x_1 - 3 < 2x_2 - 3$ (2)

Από πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι :
$x_1^{\ 3} + 2x_1 - 3 < x_2^{\ 3} + 2x_2 - 3 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Άρα η f είναι γνησίως άυξουσα.

Παρατηρούμε ότι $f(1) = 0$. Άρα η ρίζα x=1 είναι μοναδική, αφού η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα.

$$x^3 + 2x - 3 > 0 \Leftrightarrow f(x) > f(1) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x > 1$$

Έστω ότι η f ορίζεται στο R και είναι γνησίως φθίνουσα. Να αποδειχθεί ότι για κάθε x≠1 ισχύει ότι $f(x^2+1) < \mathrm{f}(2x)$

Λύση:

$$f(x^2+1) < \mathrm{f}(2x) \overset{f \nearrow}{\Leftrightarrow} x^2+1 < 2x \Leftrightarrow x^2-2x+1 < 0 \Leftrightarrow (\mathrm{x}-1)^2 > 0$$

Έστω ότι η συνάρτηση f : R→R γνησίως φθίνουσα και η g : $R \to R$ γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x) = f(x) - \mathrm{g(x)}$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Λύση:

Έστω $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in R$ τότε ισχύει ότι:

$f(x_1) > f(x_2)$ αφού η f είναι γνησίως φθίνουσα συνάρτηση. **(1)**

$g(x_1) < g(2x_2) \Leftrightarrow$
$-g(x_1) > -g(2x_2)$ αφού η g είναι αύξουσα συνάρτηση **(2)**

Από πρόσθεση κατά μέλη των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι :

$$\begin{array}{l} f(x_1) > f(x_2) \\ -g(x_1) > -g(x_2) \\ \hline \end{array}$$

$f(\mathrm{x}_1) - \mathrm{g}(\mathrm{x}_1) > f(\mathrm{x}_2) - \mathrm{g}(\mathrm{x}_2) \Leftrightarrow \mathrm{h}(\mathrm{x}_1) > \mathrm{h}(\mathrm{x}_2)$ Άρα η h είναι γνησίως φθίνουσα.

Ασκήσεις στην μονοτονία

a. Να μελετηθούν ως προς την μονοτονία οι παρακάτω συναρτήσεις $f(x) = 5x^3 + 2x - 4$
b. $f(\mathrm{x}) = \dfrac{2}{x} - \sqrt{x} + 3$
c. $f(x) = 5\sqrt{x-1} + 3x^2 - 1$
d. $f(x) = \sqrt{x+2} + 3x - 1$

2. Να μελετηθεί η $f(x) = \begin{cases} 2x-1, x \le 3 \\ 1-2x \; x > 3 \end{cases}$
3. Να αποδειχθεί ότι αν η f είναι γνησίως αύξουσα στο R, να αποδειχθεί ότι η –f είναι γνησίως φθίνουσα στο R.
4. Έστω ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και το γράφημά της, διέρχεται από το σημείο A(-5,1) και το σημείο B(6,2).
   a. Να βρεθεί το είδος της μονοτονίας της.
   b. Να λυθεί η ανίσωση $f(x+1) > f(10)$
   c. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 2$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{x-5}+3x^2-10$
    a. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f.
    b. Να μελετηθεί η f ως προς την μονοτονία της.
    c. Να λυθεί η ανίσωση $f(x)<f(10)$
6. Έστω ότι η συνάρτηση $f: R \to R$ γνησίως αύξουσα και η $g: R \to R$ γνησίως αύξουσα. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $h(x)=f(x)+g(x)$ είναι γνησίως αύξουσα.
7. Οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το R και είναι γνησίως φθίνουσες. Αν $f(x)>0$ και $g(x)>0$ για κάθε $x\in R$, να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η συνάρτηση $h(x)=f(x)g(x)$
8. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να μελετηθεί ως προς την μονοτονία η $g(x)=2\left(f(x)\right)^3-5x+4$
9. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R, να δείξετε ότι $f\left(\alpha^2+1\right)\geq f\left(2\alpha\right)$
10. Να αποδείξετε ότι δεν είναι δυνατόν η γραφική παράσταση μίας γνησίως φθίνουσας συνάρτησης να τέμνει τον άξονα x΄x σε δύο διαφορετικά σημεία.
11. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R να αποδείξετε ότι $f(x^2+3)<f(2)\ \forall x\in R$.
12. Έστω $f(x)=x^3-\dfrac{1}{x}+5$ με $A_f=(0,+\infty)$
    a. Να μελετηθεί η μονοτονία της f.
    b. Να αποδειχθεί ότι $2018^3+\dfrac{1}{2017}>2017^3+\dfrac{1}{2018}$
13. Έστω $f(x)=x^3+x^2+1,\ A_f=[0,+\infty)$
    a. Να μελετηθεί η μονοτονία της f.

Να λυθεί η ανίσωση $f(x)\leq 3$ στο πεδίο ορισμού της.