Κεφάλαιο 1

Προαπαιτούμενες Έννοιες

Στο Κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με έννοιες που είναι γνωστές από το Λύκειο, όπως είναι τα σύνολα, οι απεικονίσεις, οι μιγαδικοί αριθμοί, η μαθηματική επαγωγή και τα πολυώνυμα. Ο σκοπός εδώ είναι να υπενθυμίσουμε βασικά στοιχεία και τεχνικές των μαθηματικών που είναι απαραίτητες στη μελέτη της Γραμμικής Άλγεβρας.

ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ

Με

$$\mathbb{Z}=\{\ldots,-1,0,1,\ldots\},\ \mathbb{N}=\{1,2,\ldots\},\ \mathbb{Q}=\left\{\frac{m}{n}\middle| m,n\in\mathbb{Z}, n\neq 0\right\},\ \mathbb{R}$$

συμβολίζουμε αντίστοιχα το σύνολο των ακεραίων αριθμών, το σύνολο των θετικών ακεραίων, το σύνολο των ρητών αριθμών και το σύνολο των πραγματικών αριθμών. Για το σύνολο $\mathbb{N}$ των θετικών ακεραίων θα χρησιμοποιούμε συχνά την ονομασία ‘σύνολο των φυσικών αριθμών’.

ΣΥΝΟΛΑ

Ορισμός 1 (υποσύνολο)

*Έστω Α,Β δυο σύνολα. Θα λέμε ότι το Α είναι ένα **υποσύνολο** του Β (συμβολικά $A \subseteq B$) αν κάθε στοιχείο του Α είναι στοιχείο του Β.*

Παραδείγματα

- Το σύνολο $\{1,2,3\}$ είναι ένα υποσύνολο του $\{1,2,3,4\}$, αλλά δεν είναι ένα υποσύνολο του $\{2,3,4\}$.
- Το $\{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 2\}$ είναι ένα υποσύνολο του $\{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 3\}$, αλλά όχι του $\{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 2\}$.

Ένα υποσύνολο *Α* του *Β* λέγεται **γνήσιο** αν $A \ne B$. Βλέπουμε ότι κάθε υποσύνολο του *Β* εκτός από το ίδιο το *Β* είναι γνήσιο.

Ορισμός 2 (τομή, ένωση, συμπλήρωμα)

Έστω Α,Β δυο σύνολα.

- *Η **τομή** των Α,Β είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν και στο Α και στο Β. Η τομή των Α,Β συμβολίζεται με $A \cap B$.*
- *Η **ένωση** των Α,Β είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία που ανήκουν στο Α ή στο Β. Η ένωση των Α,Β συμβολίζεται με $A \cup B$.*
- *Το **συμπλήρωμα** του Β στο Α είναι το σύνολο που αποτελείται από τα στοιχεία του Α που δεν ανήκουν στο Β και συμβολίζεται με $A - B$.*

Παράδειγμα

- Έστω $A = \{1,2,3\}, B = \{2,3,4\}$. Τότε
  $A \cap B = \{2,3\}, A \cup B = \{1,2,3,4\}, A - B = \{1\}, B - A = \{4\}$.
- Αν $A = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 2\}, B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 3\}$, τότε
  $A \cap B = \{x \in \mathbb{R} | 1 \le x \le 2\}, A \cup B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x \le 3\}$,
  $A - B = \{x \in \mathbb{R} | 0 \le x < 1\}, B - A = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x \le 3\}$

Ορισμός 3 (καρτεσιανό γινόμενο)

*Έστω Α,Β δυο σύνολα. Το **καρτεσιανό γινόμενο** των Α,Β είναι το σύνολο με στοιχεία τα διατεταγμένα ζεύγη (a,b), όπου $a \in A$ και $b \in B$, και συμβολίζεται με $A \times B$.*

Παράδειγμα

Αν $A=\{1,2\}, B=\{1,3\}$, τότε έχουμε

$$A\times B=\{(1,1),(1,3),(2,1),(2,3)\}, B\times A=\{(1,1),(1,2),(3,1),(3,2)\}$$
$$A\times A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}, B\times B=\{(1,1),(1,3),(3,1),(3,2)\}.$$

Με ανάλογο τρόπο ορίζεται το καρτεσιανό γινόμενο $A_1\times\ldots\times A_n$ των συνόλων $A_1,\ldots,A_n$, δηλαδή το $A_1\times\ldots\times A_n$ είναι το σύνολο των διατεταγμένων n – άδων $(a_1,\ldots,a_n)$, όπου $a_i\in A_i$. Στην ειδική περίπτωση $A_1=\ldots=A_n=A$, θα γράφουμε A^n στη θέση του $A_1\times\ldots\times A_n$.

Παράδειγμα

$$\mathbb{R}^2=\{(x,y)\,|\,x,y\in\mathbb{R}\},\quad \mathbb{R}^3=\{(x,y,z)\,|\,x,y,z\in\mathbb{R}\}.$$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Ορισμός 4 (απεικόνιση επί και 1-1, εικόνα)

Έστω $f:X\to Y$ μια απεικόνιση. Θα λέμε ότι η f είναι

- ***επί** αν για κάθε $y\in Y$ υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε $f(x)=y$*
- ***ένα προς ένα** (συμβολικά 1-1) αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ με $x_1\neq x_2$ έπεται ότι $f(x_1)\neq f(x_2)$.*

Παρατηρούμε ότι η f είναι 1-1 αν για κάθε $x_1,x_2\in X$ τέτοια ώστε $f(x_1)=f(x_2)$ έπεται ότι $x_1=x_2$.

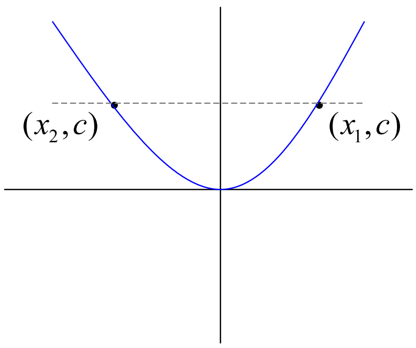
Η **εικόνα** $f(X)$ της $f:X\to Y$ είναι το σύνολο $\{f(x)\in Y\,|\,x\in X\}$. Η εικόνα της f συμβολίζεται και με imf. Παρατηρούμε ότι η f είναι επί αν και μόνο αν $f(X)=Y$.

Παραδείγματα

- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}, f(x)=2x,$ δεν είναι επί αφού, για παράδειγμα, δεν υπάρχει $x\in\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε $f(x)=1$. Αυτή είναι 1-1 γιατί από τη σχέση $f(x_1)=f(x_2)$ έπεται ότι $2x_1=2x_2$, δηλαδή $x_1=x_2$. Η εικόνα της είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων.

- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to A, f(x)=2x,$ όπου A είναι το σύνολο των άρτιων ακεραίων είναι επί και 1-1.
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{Z}\to\{1,-1\}, f(x)=\cos(x\pi)$, είναι επί. Αυτή δεν είναι 1-1 αφού, για παράδειγμα, $f(0)=f(2)$
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2$, δεν είναι επί αφού δεν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$, τέτοιο ώστε $f(x)=-1$. Επίσης η f δεν είναι 1-1 αφού, για παράδειγμα, $f(-2)=f(2)$. Η εικόνα της είναι το σύνολο των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.

  Τα προηγούμενα συμπεράσματα έχουν γεωμετρικές ερμηνείες. Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)=x^2$ φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

  Παρατηρούμε ότι η οριζόντια διακεκομμένη ευθεία (της οποίας η εξίσωση είναι της μορφής $y=c,$ όπου c είναι μια θετική σταθερή) τέμνει την καμπύλη σε δυο σημεία. Δηλαδή υπάρχουν δυο διαφορετικά x που αντιστοιχίζουν στο ίδιο y και άρα η συνάρτηση $f(x)=x^2$ δεν είναι 1-1. Επίσης από τη γραφική παράσταση βλέπουμε ότι η εικόνα της συνάρτησης είναι ο πάνω ημιάξονας των y, δηλαδή είναι το σύνολο $\{y\in\mathbb{R}\,|\,y\geq 0\}$ των μη αρνητικών πραγματικών αριθμών.
- Η απεικόνιση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=5x-3,$ είναι επί και 1-1. Πράγματι, αν $y\in\mathbb{R}$, τότε για $x=\dfrac{y+3}{5}$ έχουμε $f(x)=y$ και άρα η f είναι επί. Αν $f(x_1)=f(x_2)$, τότε $5x_1-3=5x_2-3$ και επομένως $x_1=x_2$, δηλαδή η f είναι 1-1.

Ορισμός 5 (σύνθεση, αντίστροφη απεικόνιση)

- *Θεωρούμε απεικονίσεις* $f : X \to Y, g : W \to Z$ *τέτοιες ώστε* $f(X) \subseteq W$. *Τότε ορίζεται μια απεικόνιση* $g \circ f : X \to Z, (g \circ f)(x) = g(f(x))$. *Αυτή λέγεται η* ***σύνθεση*** *της f με τη g.*

  Παράδειγμα

  Για τις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3,$ και $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(x) = x^2$, έχουμε $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(5x-3) = (5x-3)^2 = 25x^2 - 30x + 9$. Στο παράδειγμα αυτό ορίζεται και η σύνθεση $f \circ g$. Για αυτή έχουμε $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2) = 5x^2 - 3$.
- *Μια απεικόνιση* $f : X \to Y$ *λέγεται* ***αντιστρέψιμη*** *αν υπάρχει απεικόνιση* $g : Y \to X$ *τέτοια ώστε για κάθε* $x \in X$, $g(f(x)) = x$ *και για κάθε* $y \in Y$, $f(g(y)) = y$.
- *Στην περίπτωση που η f είναι αντιστρέψιμη, αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδική g με τις προηγούμενες ιδιότητες. Η g αυτή λέγεται η* ***αντίστροφη*** *απεικόνιση της f και συμβολίζεται συχνά με* f^{-1}.

Παραδείγματα

- Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x - 3,$ είναι αντιστρέψιμη. Πράγματι, θεωρώντας την απεικόνιση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, g(y) = \frac{y+3}{5}$, έχουμε

  $g(f(x)) = g(5x-3) = \frac{(5x-3)+3}{5} = x$ και

  $f(g(y)) = f(\frac{y+3}{5}) = 5\left(\frac{y+3}{5}\right) - 3 = y$.
- Η απεικόνιση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 - 2,$ δεν είναι αντιστρέψιμη, γιατί αν υπήρχε $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $g(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, τότε θέτοντας $x = \pm\sqrt{2}$ θα είχαμε ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι ισότητες $g(f(\sqrt{2})) = \sqrt{2}, g(f(-\sqrt{2})) = -\sqrt{2}$. Από αυτές παίρνουμε $g(0) = \sqrt{2}, g(0) = -\sqrt{2},$ δηλαδή $\sqrt{2} = -\sqrt{2}$, που είναι άτοπο.

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Ορισμός 6 (άθροισμα και γινόμενο μιγαδικών)

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μίγαδικών αριθμών είναι το $\mathbb{C}=\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R}\}$, όπου $i^2=-1$.

Κάθε στοιχείο του $\mathbb{C}$ γράφεται μοναδικά στη μορφή $a+bi$ με $a,b\in\mathbb{R}$, δηλαδή έχουμε $a+bi=c+di,$ όπου $a,b,c,d\in\mathbb{R},$ αν και μόνο αν $a=c$ και $b=d$.

Έστω $z,w\in\mathbb{C}$ με $z=a+bi$ και $w=c+di.$ Ορίζουμε το άθροισμα και το γινόμενο μιγαδικών αριθμών ως εξής.

- *Πρόσθεση* $z+w=(a+c)+(b+d)i$.
- *Πολλαπλασιασμός* $zw=(ac-bd)+(ad+bc)i$

  Παράδειγμα

  Αν $z=\sqrt{2}-5i$ και $w=1+3i$, τότε

  $$z+w=(\sqrt{2}+1)+(-5+3)i=(\sqrt{2}+1)+(-2)i$$

  $$zw=(\sqrt{2}+5\cdot 3)+(3\sqrt{2}-5)i=(\sqrt{2}+15)+(3\sqrt{2}-5)i.$$

Ορισμός 7 (αντίστροφος μιγαδικού)

Έστω $z=a+bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός, όπου $a,b\in\mathbb{R}$. (Από τώρα και στο εξής όταν γράφουμε $z=a+bi$ θα εννοούμε ότι $a,b\in\mathbb{R}$ ακόμα και αν δεν το αναφέρουμε ρητά). Τότε κάποιος από τους a,b είναι μη μηδενικός και άρα $a^2+b^2\neq 0.$ *Ο μιγαδικός αριθμός* $\frac{a}{a^2+b^2}+\frac{-b}{a^2+b^2}i$ *ονομάζεται ο* ***αντίστροφος*** *του z και συμβολίζεται με* z^{-1}. Επισημαίνουμε ότι $zz^{-1}=z^{-1}z=1$.

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του $z=3-7i$ είναι ο $z^{-1}=\frac{3}{3^2+7^2}+\frac{7}{3^2+7^2}i=\frac{3}{58}+\frac{7}{58}i$

Ορισμός 8 (μέτρο μιγαδικού, συζυγής μιγαδικός)

- *Το* ***μέτρο*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο πραγματικός αριθμός* $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$.
- *Ο* ***συζυγής*** *του* $z=a+bi$ *είναι ο* $\bar{z}=a-bi$. *Παρατηρούμε ότι* $|z|^2=z\bar{z}$.

Παράδειγμα

Το μέτρο του $z=3-\frac{1}{2}i$ *είναι* $|z|=\sqrt{3^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{37}}{2}$ *και ο συζυγής του είναι* $\bar{z}=3+\frac{1}{2}i$.

Ορισμός 9 (τριγωνομετρική μορφή)

Έστω $z=a+bi$ ένας μη μηδενικός μιγαδικός αριθμός και $\rho=|z|$. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικός πραγματικός αριθμός θ τέτοιος ώστε

$$0\leq\theta<2\pi,\ \cos\theta=\frac{a}{\rho},\ \sin\theta=\frac{b}{\rho}.$$

Ο θ ονομάζεται το ***όρισμα*** *του z. Η παράσταση* $z=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ *ονομάζεται η* ***τριγωνομετρική μορφή*** *του z.*

Παράδειγμα

Για να βρούμε την τριγωνομετρική μορφή του $z=\sqrt{3}+i$, βρίσκουμε πρώτα το μέτρο του

$$\rho=|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=2.$$

Για το όρισμα έχουμε $\cos\theta=\frac{a}{\rho}=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\theta=\frac{b}{\rho}=\frac{1}{2}$. Από τις σχέσεις αυτές συμπεραίνουμε ότι $\cos\theta=\cos\frac{\pi}{6}$, $\sin\theta=\sin\frac{\pi}{6}$ και άρα $\theta=\frac{\pi}{6}+2k\pi$ για κάποιο $k\in\mathbb{Z}$. Επειδή $0\leq\theta<2\pi$ έχουμε $\theta=\frac{\pi}{6}$. Άρα η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Ορισμός 10 (βαθμός, διαίρεση)

Με $\mathbb{F}$ συμβολίζουμε ένα από τα σύνολα $\mathbb{R},\mathbb{C}$ και με $\mathbb{F}[x]$ συμβολίζουμε το σύνολο των πολυωνύμων που έχουν συντελεστές από το $\mathbb{F}$.

- *Έστω* $f(x)=f_nx^n+\ldots+f_1x+f_0\in\mathbb{F}[x]$. *Αν* $f_n\neq0$, *θα λέμε ότι ο* ***βαθμός*** *του f(x) είναι n. Ο βαθμός του μηδενικού πολυωνύμου ορίζεται να είναι το* $-\infty$.

- *Έστω* $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Θα λέμε ότι το f(x)* ***διαιρεί*** *το g(x) επί του* $\mathbb{F}$ *αν υπάρχει h(x) ∈F[x] τέτοιο ώστε g(x) = f(x)h(x).*

Παράδειγμα

Το $x^2 - 1$ διαιρεί το $x^3 + x^2 - x - 1$ επί του $\mathbb{R}$ αφού $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 - 1)(x + 1)$.
Όμως το $x^2 + 1$ δεν διαιρεί το $x^3 + x^2 - x - 1$ επί του $\mathbb{R}$ αφού σε διαφορετική περίπτωση θα είχαμε $x^3 + x^2 - x - 1 = (x^2 + 1)h(x), h(x) \in \mathbb{R}[x]$. Αντικαθιστώντας το x με το i θα είχαμε $i^3 + i^2 - i - 1 = 0 \Rightarrow -2 - 2i = 0$, που είναι άτοπο.

Ορισμός 11 (ρίζα πολυωνύμου)

Ένας μιγαδικός αριθμός α λέγεται ***ρίζα*** *του πολυωνύμου* $f(x) \in \mathbb{F}[x]$, *αν f(a) = 0.*

Παράδειγμα

Με πράξεις διαπιστώνεται ότι $(-1 + i\sqrt{3})^3 = 8$. Άρα ο μιγαδικός αριθμός $-1 + i\sqrt{3}$ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου $x^3 - 8$.

ΘΕΜΕΛΙΩΔΕΙΣ ΓΝΩΣΕΙΣ

ΣΥΝΟΛΑ

Πρόταση 1 (τομή και ένωση)

Έστω A, B, C *σύνολα. Τότε ισχύουν οι παρακάτω σχέσεις.*

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$
$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \qquad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$
$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A$$
$$A \cap \varnothing = \varnothing \qquad A \cup \varnothing = A$$

Πρόταση 2 (συμπλήρωμα συνόλου)

Έστω S *ένα σύνολο,* $A \subseteq S$ *και* $B \subseteq S$. *Με* A^c *συμβολίζουμε το* $S - A$. *Τότε ισχύουν οι σχέσεις*

$$\left(A \cap B\right)^c = A^c \cup B^c \text{ και } \left(A \cup B\right)^c = A^c \cap B^c.$$

ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Πρόταση 3 (σύνθεση απεικονίσεων)

Έστω $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ *δυο απεικονίσεις. Ισχύουν τα εξής.*

1. *Αν οι f και g είναι επί , τότε και σύνθεση* $g \circ f$ *είναι επί.*
2. *Αν οι f και g είναι 1-1, τότε και η σύνθεση* $g \circ f$ *είναι 1-1.*
3. *Αν οι f και g είναι 1-1 και επί, τότε και η σύνθεση* $g \circ f$ *είναι 1-1 και επί.*

Πρόταση 4 (κριτήριο ύπαρξης αντίστροφης απεικόνισης)

Μια απεικόνιση είναι αντιστρέψιμη αν και μόνο αν είναι 1-1 και επί.

Πρόταση 5

Έστω $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ *δυο απεικονίσεις που είναι 1-1 και επί. Τότε η σύνθεση* $g \circ f : X \to Z$ *είναι 1-1 και επί και ισχύει* $\left(g \circ f\right)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

ΕΠΑΓΩΓΗ

Η **μαθηματική επαγωγή** ή απλά **επαγωγή** είναι μια μέθοδος απόδειξης που μπορεί να περιγραφεί ως εξής.

Έστω ότι για κάθε φυσικό αριθμό n έχουμε μια πρόταση P(n), που αφορά τον n, τέτοια ώστε
1. *η P(1) αληθεύει, και*
2. *για κάθε n, αν αληθεύει η P(n) τότε αληθεύει και η P(n+1).*

Τότε συμπεραίνουμε ότι η πρόταση P(n) αληθεύει για κάθε n.

Παράδειγμα

Να αποδειχτεί ότι για φυσικό αριθμό *n* έχουμε

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Λύση

Για $n = 1$, η αποδεικτέα σχέση γίνεται $-1 = -1\dfrac{1 \cdot 2}{2}$, που βέβαια αληθεύει.

Υποθέτουμε ότι για συγκεκριμένο *n* ισχύει η ισότητα

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^n n^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$$

και θα αποδείξουμε την

$$-1^2 + 2^2 - 3^2 + \ldots + (-1)^{n+1} \left(n+1\right)^2 = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)\left(n+2\right)}{2}.$$

Έχουμε

$$-1^2+2^2-3^2+\ldots+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$\left(-1^2+2^2-3^2+\ldots+(-1)^n n^2\right)+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$(-1)^n\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n+1}\left(n+1\right)^2=$$
$$(-1)^{n+1}\frac{-n(n+1)+2(n+1)^2}{2}=$$
$$(-1)^{n+1}\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

ΜΙΓΑΔΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

Πρόταση 6 (μέτρο μιγαδικού αριθμού)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z|=|-z|$
2. $|z_1 z_2|=|z_1||z_2|$
3. *αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\left|\frac{z_1}{z_2}\right|=\frac{|z_1|}{|z_2|}$
4. $|z_1+z_2|\leq|z_1|+|z_2|$.

Παράδειγμα

Για να βρούμε το μέτρο του $\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}$ έχουμε

$$\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}=\frac{1-i+\left(4-5i\right)\left(2+3i\right)}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}=\frac{24+i}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}$$

και επομένως

$$\left|\frac{1}{2+3i}+\frac{4-5i}{1-i}\right|=\left|\frac{24+i}{\left(2+3i\right)\left(1-i\right)}\right|=\frac{|24+i|}{\left|\left(2+3i\right)\right|\left|\left(1-i\right)\right|}=$$
$$\frac{\sqrt{24^2+1^2}}{\sqrt{2^2+3^2}\sqrt{1^2+1^2}}=\sqrt{\frac{577}{26}}.$$

Πρόταση 7 (συζυγείς μιγαδικοί)

Έστω $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. *Τότε*

1. $|z|^2=z\bar{z}$

2. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$

3. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1}\,\overline{z_2}$

4. *αν* $z_2 \neq 0$, *τότε* $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)} = \dfrac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$

Πρόταση 8 (τριγωνομετρική μορφή μιγαδικού)

Έστω $z_1 = \rho_1\left(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1\right)$ *και* $z_2 = \rho_2\left(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2\right)$. *Τότε έχουμε*

$$z_1 z_2 = \rho_1\rho_2\left(\cos\left(\theta_1 + \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 + \theta_2\right)\right)$$

και αν $z_2 \neq 0$,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}\left(\cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) + i\sin\left(\theta_1 - \theta_2\right)\right).$$

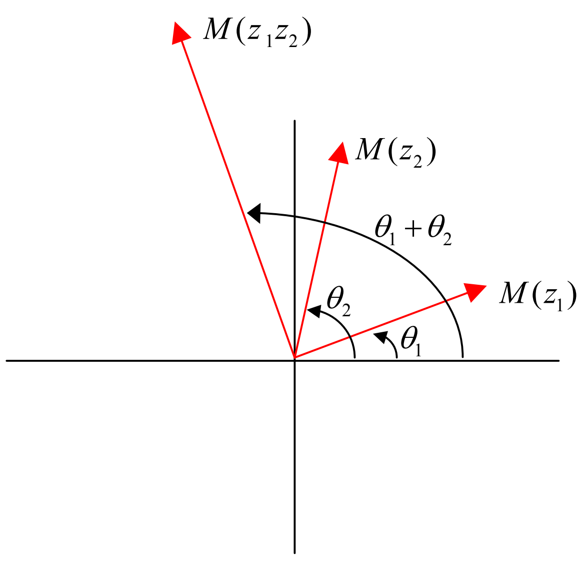
Θεώρημα 9 (του De Moivre)

Έστω $z = \rho\left(\cos\theta + i\sin\theta\right) \neq 0$. *Τότε για κάθε ακέραιο αριθμό* n *έχουμε*

$$z^n = \rho^n\left(\cos\left(n\theta\right) + i\sin\left(n\theta\right)\right).$$

Γεωμετρική ερμηνεία γινομένου μιγαδικών

Από την [Πρόταση 8](#) βλέπουμε ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών έχει μια απλή γεωμετρική ερμηνεία: στο γινόμενο $z_1 z_2$ αντιστοιχεί ένα διάνυσμα που το μέτρο του είναι το γινόμενο $|z_1||z_2|$ και σχηματίζει γωνία με τον άξονα των x ίση με $\theta_1 + \theta_2$ όπως φαίνεται στο επόμενο σχήμα



Θεώρημα 10 (n – στές ρίζες μιγαδικού)

Έστω $a \in \mathbb{C}, a \neq 0, n \in \mathbb{N}$. *Η εξίσωση* $z^n = a$ *έχει* n *διακεκριμένες λύσεις που δίνονται από τον τύπο*

$$z_k = \sqrt[n]{\rho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right), \quad k = 0,1,\ldots,n-1,$$

όπου ρ *είναι το μέτρο του* a *και* θ *είναι το όρισμά του.*

Παράδειγμα

Για να λύσουμε την εξίσωση $z^3 = i$ έχουμε

$$z^3 = i = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$z_k = \cos\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3}, \; k = 0,1,2.$$

Άρα οι λύσεις είναι

$$z_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2},$$

$$z_1 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{9\pi}{6} + i\sin\frac{9\pi}{6} = -i$$

Σημείωση. Οι λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ αντιστοιχούν στα σημεία του επιπέδου που είναι κορυφές του κανονικού n - γώνου.

ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Πρόταση 11 (βαθμός πολυωνύμου)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$. *Τότε* $\deg(f(x)g(x)) = \deg f(x) + \deg g(x)$, *όπου* $\deg f(x)$ *είναι ο βαθμός του f(x).*

Πρόταση 12 (αλγόριθμος διαίρεσης)

Έστω $f(x), g(x) \in \mathbb{F}[x]$ *με* $g(x) \neq 0$. *Τότε υπάρχουν μοναδικά πολυώνυμα* $q(x), r(x) \in \mathbb{F}[x]$ *τέτοια ώστε* $f(x) = g(x)q(x) + r(x)$ *και* $\deg r(x) < g(x)$.

Πρόταση 13 (ρίζες πολυωνύμων)

Έστω $f(x) \in \mathbb{F}[x]$ *και* $a \in \mathbb{F}$. *Ισχύουν τα εξής*

1. *Το υπόλοιπο της διαίρεσης του* $f(x)$ *με το* $x-a$ *είναι το* $f(a)$.
2. *Το a είναι ρίζα του* $f(x)$ *αν και μόνο αν το* $x-a$ *διαιρεί το* $f(x)$ *επί του* $\mathbb{F}$.
3. *Αν* $f(x)\neq 0$, *τότε το πλήθος των ριζών του είναι το πολύ* $\deg f(x)$.

Παράδειγμα

Έστω ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)=x^3+ax^2+2x-1$ με το $x-2$ είναι 3. Τότε από το 1 της προηγούμενης Πρότασης έχουμε $f(2)=3$, δηλαδή $2^3+a2^2+2\cdot 2-1=3\Rightarrow a=-2$.

Θεώρημα 14 (Θεμελιώδες Θεώρημα της Άλγεβρας)

Κάθε πολυώνυμο θετικού βαθμού με συντελεστές από το $\mathbb{C}$ *έχει τουλάχιστον μια μιγαδική ρίζα.*

Θεώρημα 15 (πλήθος ριζών πολυωνύμου)

Έστω $f(x)\in\mathbb{C}[x]$ *ένα πολυώνυμο θετικού βαθμού με* $\deg f(x)=n$. *Τότε υπάρχουν* $c,a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ *τέτοια ώστε* $f(x)=c(x-a_1)\dots(x-a_n)$.

Πρόταση 16

Αν το $z\in\mathbb{C}$ *είναι ρίζα ενός πολυωνύμου που έχει πραγματικούς συντελεστές, τότε και ο συζυγής* $\bar{z}$ *είναι ρίζα του πολυωνύμου αυτού.*

Για συγκεκριμένα παραδείγματα εφαρμογής των προηγούμενων αποτελεσμάτων παραπέμπουμε στις Λυμένες Ασκήσεις 11,12,13.

Θεώρημα 17 (σχέσεις του Vieta)

Αν το $f(x)=f_nx^n+\dots+f_1x+f_0$ *είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n και* $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{C}$ *είναι οι ρίζες του, τότε*

$$\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} a_{i_1}\dots a_{i_k}=(-1)^k\frac{f_{n-k}}{f_n}.$$

Παράδειγμα

Αν a_1,a_2,a_3 είναι οι ρίζες του x^3-4x^2-3x-1, τότε

$$a_1+a_2+a_3=4$$
$$a_1a_2+a_1a_3+a_2a_3=-3$$
$$a_1a_2a_3=1$$

ΛΥΜΕΝΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Αποδείξτε ότι αν A,B είναι σύνολα, τότε $A\cup B - A\cap B = (A-B)\cup(B-A)$.

Λύση

Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 2 έχουμε

$$x\in A\cup B - A\cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A\cup B \\ \kappa\alpha\iota \\ x\notin A\cap B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \text{ ή } x\in B \\ \kappa\alpha\iota \\ x\notin A \text{ ή } x\notin B \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in A \;\kappa\alpha\iota\; x\notin B \\ \text{ή} \\ x\in B \;\kappa\alpha\iota\; x\notin A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A-B \\ \text{ή} \\ x\in B-A \end{cases} \Leftrightarrow x\in (A-B)\cup(B-A).$$

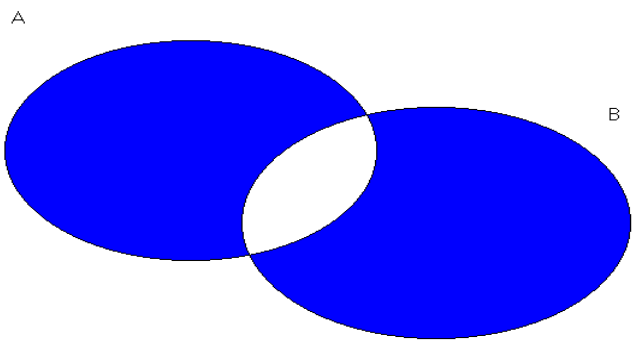
Άρα $A\cup B - A\cap B = (A-B)\cup(B-A)$.

Σημείωση

- Η λύση θα μπορούσε να διατυπωθεί με τη βοήθεια της Πρότασης 2 για $S = A\cup B$ ως εξής.

$$A\cup B - A\cap B = (A\cap B)^c = A^c \cup B^c =$$
$$(A\cup B - A)\cup(A\cup B - B) = (B-A)\cup(A-B).$$

- Το σύνολο $A\cup B - A\cap B = (A-B)\cup(B-A)$ αντιστοιχεί στο χρωματισμένο τμήμα του διαγράμματος του Venn. Από το διάγραμμα αυτό φαίνεται ότι η προηγούμενη ισότητα είναι αναμενόμενη.



Άσκηση 2

1. *Να βρεθεί η εικόνα* $f(\mathbb{R})$ *της συνάρτησης* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-x-5$.
2. *Να βρεθεί η εικόνα της συνάρτησης*

$$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=ax^2+bx+c,\quad a,b,c\in\mathbb{R}, a>0.$$

Στη συνέχεια να αποδειχτεί ότι η συνάρτηση

$$h:[\frac{-b}{2a},\infty)\to g(\mathbb{R}), h(x)=g(x),$$

είναι αντιστρέψιμη. Να δοθεί μια γεωμετρική ερμηνεία.

Λύση

1. *Πρώτη λύση*. Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$f(x)=x^2-x-5=\left(x^2-2\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)-\left(\frac{1}{2}\right)^2-5=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}\geq-\frac{21}{4}.$$

Άρα $f(\mathbb{R})=[-\frac{21}{4},\infty)$.

Δεύτερη λύση. Ένα $y\in\mathbb{R}$ ανήκει στην εικόνα της *f*(*x*) αν και μόνο αν υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $x^2-x-5=y$, δηλαδή αν και μόνο αν το τριώνυμο $x^2-x-(5+y)$ έχει μια πραγματική ρίζα. Η διακρίνουσα $\Delta=(-1)^2-4\big(-(5+y)\big)$ του τριωνύμου είναι μη αρνητική αν και μόνο αν $1+4(5+y)\geq 0\Leftrightarrow y\geq-\frac{21}{4}$. Άρα $f(\mathbb{R})=[-\frac{21}{4},\infty)$.

2. Εργαζόμενοι όπως ακριβώς στην πρώτη λύση βρίσκουμε

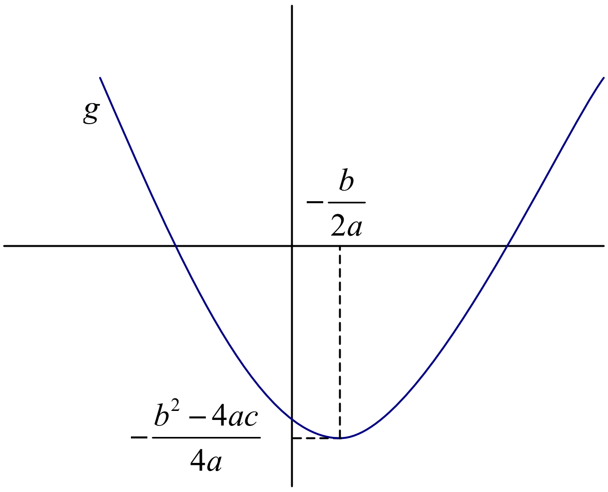
$$g(x)=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2-\frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Επειδή $a>0$, συμπεραίνουμε ότι $g(\mathbb{R})=[-\frac{b^2-4ac}{4a},\infty)$.

Επειδή η *h* είναι επί, για να δείξουμε ότι αυτή είναι αντιστρέψιμη αρκεί να δείξουμε ότι είναι 1-1 (βλ. Πρόταση 4). Έστω $x_1,x_2\in[\frac{-b}{2a},\infty)$ με $x_1\neq x_2$ και $h(x_1)=h(x_2)$. Θα φθάσουμε σε άτοπο. Έχουμε

$$h(x_1) = h(x_2) \Rightarrow ax_1^{\,2} + bx_1 + c = ax_2^{\,2} + bx_2 + c \Rightarrow$$
$$a(x_1^{\,2} - x_2^{\,2}) + b(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow a(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Rightarrow$$
$$a(x_1 + x_2) + b \Rightarrow x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Επειδή όμως $x_1, x_2 \in [\frac{-b}{2a}, \infty)$, βλέπουμε ότι από τη σχέση $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ έπεται ότι $x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$. Αυτό είναι άτοπο αφού $x_1 \neq x_2$.



Η συνάρτηση h είναι ο περιορισμός της g στο υποσύνολο $[\frac{-b}{2a}, \infty)$. Η γραφική παράσταση της h είναι το 'δεξιό μισό' της γραφικής παράστασης της g. Από το σχήμα φαίνεται ότι οι g και h έχουν την ίδια εικόνα (το τμήμα του άξονα των y που είναι πάνω από το $-\frac{b^2 - 4ac}{4a}$ συμπεριλαμβανομένου του σημείου αυτού), αλλά μόνο η h είναι 1-1.

Άσκηση 3

Εξετάστε αν η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, είναι 1-1 ή/και επί και επιπλέον προσδιορίστε την εικόνα της.

Λύση

Για το 1-1: Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}, x_1 \neq x_2$ με $f(x_1) = f(x_2)$. Έχουμε

$$f(x_1)=f(x_2)\Leftrightarrow \frac{x_1}{x_1^{\,2}+1}=\frac{x_2}{x_2^{\,2}+1}\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2^{\,2}+x_1=x_1^{\,2}x_2+x_2\Leftrightarrow x_1x_2(x_1-x_2)=x_1-x_2\Leftrightarrow$$
$$x_1x_2=1.$$

Επομένως η $f(x)$ δεν είναι 1-1, αφού επιλέγοντας $x_1,x_2\in\mathbb{R}, x_1\neq x_2$ με $x_1x_2=1$ έχουμε $f(x_1)=f(x_2)$. Για παράδειγμα, αν $x_1=2, x_2=\frac{1}{2}$, τότε $f(x_1)=f(x_2)=2/5.$

Για το επί: Έστω $y\in\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε υπάρχει $x\in\mathbb{R}$ με $y=f(x)$. Έχουμε

$$y=f(x)=\frac{x}{x^2+1}\Leftrightarrow yx^2-x+y=0\Leftrightarrow$$
$$\Delta=1-4y^2\geq 0\Leftrightarrow y\in\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right].$$

Άρα η εικόνα της $f(x)$ είναι το διάστημα $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ και συνεπώς η $f(x)$ δεν είναι επί.

Άσκηση 4

1. *Αποδείξτε ότι η απεικόνιση* $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}, f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ *δεν είναι αντιστρέψιμη.*
2. *Αποδείξτε ότι η απεικόνιση* $f:\mathbb{R}-\{2\}\to\mathbb{R}-\{1\}, f(x)=\frac{x-1}{x-2}$ *είναι αντιστρέψιμη και βρείτε την αντίστροφή της.*

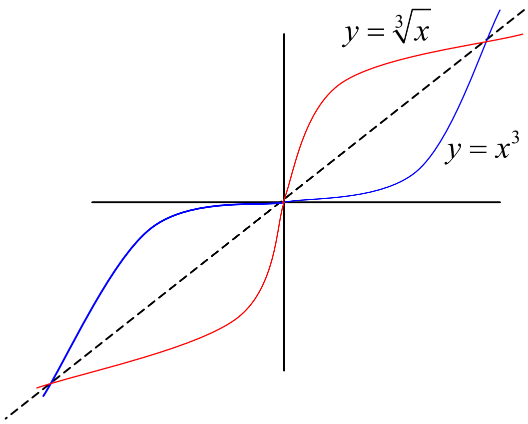
Λύση

1. Βλέπουμε ότι δεν υπάρχει x με $f(x)=1$, γιατί διαφορετικά θα είχαμε $x-1=x-2$, που είναι άτοπο. Άρα η $f(x)$ δεν είναι επί και άρα δεν είναι αντιστρέψιμη σύμφωνα με την Πρόταση 4.
2. Θα βρούμε μια απεικόνιση $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}$, τέτοια ώστε $(g\circ f)(x)=x,\ (f\circ g)(y)=y$ για κάθε $x\in\mathbb{R}-\{2\}, y\in\mathbb{R}-\{1\}$.

   Έστω $y\in\mathbb{R}-\{1\}$. Λύνοντας τη σχέση $\frac{x-1}{x-2}=y$ ως προς x βρίσκουμε $\frac{x-1}{x-2}=y\Rightarrow x(y-1)=2y-1\Rightarrow x=\frac{2y-1}{y-1}$. Ορίζουμε την απεικόνιση $g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}-\{2\}, g(y)=\frac{2y-1}{y-1}$. Πρώτα από όλα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι $g(y)\in\mathbb{R}-\{2\}$ για κάθε $y\in\mathbb{R}-\{1\}$. Πράγματι, αν

$g(y)=\dfrac{2y-1}{y-1}=2\Rightarrow 2y-1=2y-2\Rightarrow -1=-2,$ άτοπο. Για τη σύνθεση $g\circ f$ έχουμε $\left(g\circ f\right)(x)=g(f(x))=g\left(\dfrac{x-1}{x-2}\right)=\dfrac{2\dfrac{x-1}{x-2}-1}{\dfrac{x-1}{x-2}-1}=\dfrac{2x-2-x+2}{x-1-x+2}=x$. Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται και η σχέση $\left(f\circ g\right)(y)=y$. Άρα η $f(x)$ είναι αντιστρέψιμη και η αντίστροφή της είναι η $g(x)$.

Σημείωση Για την εύρεση της αντίστροφης συνάρτησης υπάρχει ένας συστηματικός τρόπος που συχνά είναι αποτελεσματικός: Έστω ότι $y=f(x)$ είναι μια αντιστρέψιμη συνάρτηση. Λύνουμε, αν αυτό είναι δυνατό, τη σχέση $y=f(x)$ ως προς x. Στην νέα σχέση $x=g(y)$ εναλλάσσουμε τα x,y παίρνοντας $y=g(x)$. Η συνάρτηση $y=g(x)$ είναι η ζητούμενη αντίστροφη. Ουσιαστικά ακολουθήσαμε αυτή την ιδέα στη λύση της προηγούμενης άσκησης. Ένα άλλο παράδειγμα υπάρχει στη [Λυμένη Άσκηση 6](#). Επισημαίνουμε ότι από τον παραπάνω τρόπο φαίνεται ότι οι γραφικές παραστάσεις μιας συνάρτησης και της αντίστροφής της είναι συμμετρικές ως προς την ευθεία $y=x$. Στο επόμενο σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της $y=x^3$ και της αντίστροφής της $y=\sqrt[3]{x}$



Άσκηση 5

Εξετάστε για ποια $k\in\mathbb{R}$ η απεικόνιση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+3y,kx+6y),$ είναι 1-1 και επί.

Λύση

Ας εξετάσουμε πρώτα το 1-1. Έστω ότι $f(x_1,y_1)=f(x_2,y_2)$. Έχουμε

$$(x_1+3y_1, kx_1+6y_1)=(x_2+3y_2, kx_2+6y_2)\Rightarrow$$
$$\begin{cases} x_1+3y_1=x_2+3y_2 \\ kx_1+6y_1=kx_2+6y_2 \end{cases}\Rightarrow$$
$$\begin{cases} kx_1+3ky_1=kx_2+3ky_2 \\ kx_1+6y_1=kx_2+6y_2 \end{cases}\Rightarrow$$
$$3(2-k)y_1=3(2-k)y_2\Rightarrow$$
$$(2-k)y_1=(2-k)y_2.$$

Διακρίνουμε δυο περιπτώσεις.

- Αν $k\neq 2$, τότε $(2-k)y_1=(2-k)y_2\Rightarrow y_1=y_2$. Από τη σχέση $x_1+3y_1=x_2+3y_2$ παίρνουμε $x_1=x_2$, οπότε $(x_1,y_1)=(x_2,y_2)$, δηλαδή η απεικόνιση είναι 1-1.
- Έστω ότι $k=2$. Τότε η δοσμένη απεικόνιση είναι η $f(x,y)=(x+3y,2x+6y)$ που δεν είναι 1-1, αφού $f(0,0)=f(3,-1)$.

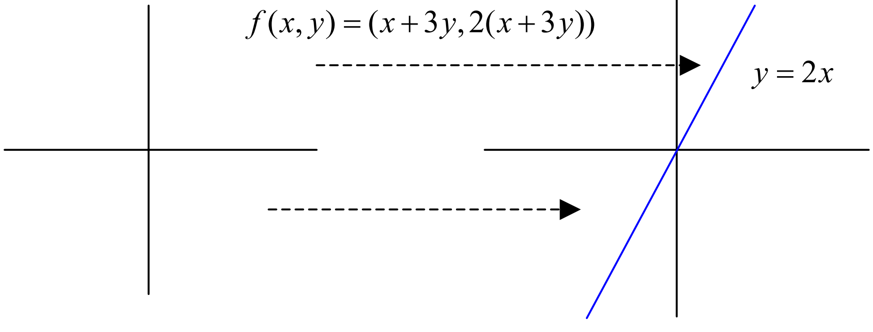
Για το επί: Επειδή μας ενδιαφέρει αν η απεικόνιση είναι 1-1 και επί, υποθέτουμε ότι $k\neq 2$. Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση είναι επί. Έστω $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Έχουμε

$$f(x,y)=(a,b)\Leftrightarrow(x+3y,kx+6y)=(a,b)\Leftrightarrow$$
$$\begin{cases} x+3y=a \\ kx+6y=b. \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι το σύστημα έχει λύση (για $k\neq 2$). Πράγματι, πολλαπλασιάζοντας την πρώτη εξίσωση του συστήματος με 2 και αφαιρώντας από τη δεύτερη βρίσκουμε $(k-2)x=b-2a\Rightarrow x=\dfrac{b-2a}{k-2}$, οπότε από την πρώτη εξίσωση του συστήματος παίρνουμε $y=\dfrac{a-x}{3}=\dfrac{a-\dfrac{b-2a}{k-2}}{3}$. Άρα η απεικόνιση είναι επί.

Τελικά βλέπουμε ότι η *f*(*x*,*y*) είναι 1-1 και επί αν και μόνο αν $k\neq 2$.

Σημείωση. Αν $k=2$, τότε η f απεικονίζει το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ σε μια ευθεία, την $y=2x$.



Άσκηση 6

Υπενθυμίζουμε πρώτα ένα ορισμό. Έστω $f: X \to X$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε το πεδίο ορισμού και το πεδίο τιμών ταυτίζονται. Για κάθε θετικό ακέραιο n ορίζουμε επαγωγικά μια συνάρτηση $f^{(n)}: X \to X$ ως εξής: $f^{(1)} = f$, και αν $n \geq 2$, τότε $f^{(n)} = f \circ f^{(n-1)}$. Βλέπουμε ότι $f^{(n)} = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{n\ \varphi o\rho \acute{\varepsilon} \varsigma}$, που είναι η σύνθεση της f με τον εαυτό της n φορές.

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 5x + 2$. Να βρεθεί ένας ΄τύπος' για τη $f^{(n)}$. Επίσης εξετάστε αν η $f^{(n)}$ είναι αντιστρέψιμη και σε θετική περίπτωση υπολογίστε την αντίστροφή της.

Λύση

Για να βρούμε ένα γενικό τύπο για τη $f^{(n)}$ ας κάνουμε μερικούς υπολογισμούς για n = 1,2,3. Έχουμε

$$f(x) = 5x + 2$$
$$f^{(2)}(x) = f(f(x)) = 5f(x) + 2 = 5(5x + 2) + 2 = 5^2 x + 2(5 + 1)$$
$$f^{(3)}(x) = f(f^{(2)}(x)) = 5f^{(2)}(x) + 2 = 5\left(5^2 x + 2(5 + 1)\right) + 2 = 5^3 x + 2(5^2 + 5 + 1).$$

Δηλαδή,

για $n = 1$, $f(x) = 5x + 2$

για $n = 2$, $f^{(2)}(x) = 5^2 x + 2(5 + 1)$

για $n = 3$, $f^{(3)}(x) = 5^3 x + 2(5^2 + 5 + 1)$.

Βασιζόμενοι σε αυτά, εικάζουμε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n έχουμε

$$f^{(n)}(x) = 5^n x + 2(5^{n-1} + ... + 5 + 1).$$

Αποδεικνύουμε τον τύπο αυτό με επαγωγή. Η περίπτωση $n = 1$ προφανώς ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο τύπος για συγκεκριμένο n. Έχουμε

$$f^{(n+1)}(x) = f\left(f^{(n)}(x)\right) =$$
$$5f^{(n)}(x) + 2 =$$
$$5\left(5^n x + 2(5^{n-1} + ... + 5 + 1)\right) + 2 =$$
$$5^{n+1} x + 2(5^n + ... + 5 + 1).$$

Άρα αποδείξαμε τον τύπο.

Τώρα εξετάζουμε αν η $f^{(n)}$ είναι 1-1. Έχουμε

$$f^{(n)}(x_1)=f^{(n)}(x_2)\Rightarrow 5^n x_1+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)=5^n x_2+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)$$
$$\Rightarrow 5^n x_1=5^n x_2\Rightarrow x_1=x_2.$$

Συνεπώς είναι 1-1.

Σημείωση. Θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ότι η $f^{(n)}$ είναι 1-1 παρατηρώντας ότι η f είναι 1-1 και εφαρμόζοντας την Πρόταση 3 2).

Τέλος για να βρούμε έναν τύπο για την αντίστροφη απεικόνιση της $f^{(n)}$, δεν έχουμε παρά να λύσουμε τη σχέση $y=f^{(n)}(x)=5^n x+2(5^{n-1}+\ldots+5+1)$ ως προς x. Έχουμε $x=\dfrac{y-2\left(5^{n-1}+\ldots+5+1\right)}{5^n}=\dfrac{1}{5^n}y-2\dfrac{5^{n-1}+\ldots+5+1}{5^n}$. Άρα η αντίστροφη απεικόνιση είναι η $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, g(x)=\dfrac{1}{5^n}x-2\dfrac{5^{n-1}+\ldots+5+1}{5^n}$.

Άσκηση 7

Έστω $z=1+i\sqrt{3}, w=\sqrt{3}-i.$

1. *Να βρεθεί η τριγωνομετρική μορφή του* $\dfrac{z}{w}$.
2. *Να βρεθούν οι ακέραιοι k τέτοιοι ώστε* $\dfrac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}.$

Λύση

1. Παρατηρούμε ότι $iw=z$ και άρα $\dfrac{z}{w}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$, που είναι η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή.

Σημείωση. Η προηγούμενη λύση βασίστηκε στην 'τυχερή' παρατήρηση ότι $iw=z$. Ένας πιο γενικός και συστηματικός τρόπος αντιμετώπισης της άσκησης είναι ο ακόλουθος.

Έχουμε $|z|=2, |w|=2.$ Επίσης

$$z=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right),$$
$$w=\sqrt{3}-i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right).$$

Από την Πρόταση 8 συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{z}{w}=\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i.$$

Η ζητούμενη τριγωνομετρική μορφή είναι $\dfrac{z}{w}=\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}$.

2. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 9 και την Πρόταση 8 παίρνουμε

$$\frac{z}{w^k}=\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{\left(2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)\right)^k}=$$

$$\frac{2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{2^k\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}k\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}k\right)\right)}=$$

$$2^{1-k}\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)\right).$$

Επομένως έχουμε

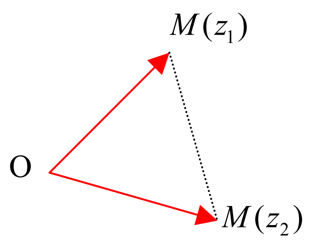
$$\frac{z}{w^k}\in\mathbb{C}-\mathbb{R}\Leftrightarrow\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\right)\neq 0\Leftrightarrow$$
$$\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}k\neq n\pi,\, n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$2+k\neq 6n,\, n\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow$$
$$k\neq 6n-2,\, n\in\mathbb{Z}.$$

Άσκηση 8

Έστω $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, τέτοιοι ώστε $|z_1|=|z_2|=|z_1-z_2|$. Δείξτε ότι $z_1^{\,3}+z_2^{\,3}=0$.

Λύση

Ας δούμε μια λύση που είναι γεωμετρική. Από την υπόθεση συμπεραίνουμε ότι το τρίγωνο που σχηματίζεται από την αρχή των αξόνων O και τα πέρατα $M(z_1), M(z_2)$ των διανυσμάτων που αντιστοιχούν στους μιγαδικούς z_1,z_2 είναι ισόπλευρο.



Άρα η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{OM(z_1)},\overrightarrow{OM(z_2)}$ είναι π/3. Έστω $w=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$. Από τη γεωμετρική ερμηνεία του πολλαπλασιασμού μιγαδικών συμπεραίνουμε ότι έχουμε $z_1=wz_2$ (ή $z_2=wz_1$). Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$z_1^3 + z_2^3 = w^3 z_2^3 + z_2^3 = (w^3+1)z_2^3 =$$
$$\left(\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)^3 + 1\right)z_2^3 =$$
$$\left(\left(\cos\frac{3\pi}{3} + i\sin\frac{3\pi}{3}\right)+1\right)z_2^3 =$$
$$(-1+1)z_2^3 = 0.$$

Στη δεύτερη περίπτωση, με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι $z_1^3 + z_2^3 = 0$.

Άσκηση 9

Έστω $z = \cos\dfrac{2\pi}{2004} + i\sin\dfrac{2\pi}{2004}$.

1. *Αποδείξτε ότι* $1 + z^4 + z^8 + ... + z^{2000} = 0$.
2. *Αποδείξτε ότι για κάθε* $n_1, ..., n_k \in \mathbb{Z}$, *έχουμε* $\left|z^{n_1} + ... + z^{n_k}\right| \le k$.

Λύση

1. Θέτοντας $w = z^4$ παρατηρούμε ότι

$$w^{501} = \left(z^4\right)^{501} = z^{2004} = \left(\cos\frac{2\pi}{2004} + i\sin\frac{2\pi}{2004}\right)^{2004} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = 1 \text{ σύμφωνα}$$

με το Θεώρημα του De Moivre. Άρα έχουμε

$$1 + z^4 + z^8 + ... + z^{2000} = 1 + w + w^2 + ... + w^{500} = \frac{w^{501}-1}{w-1} = \frac{1-1}{w-1} = 0.$$

Σημείωση. Έχουμε $w - 1 \ne 0$.

2. Επειδή $|z| = 1$, έχουμε $\left|z^n\right| = 1$ για κάθε ακέραιο n. Άρα από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε $\left|z^{n_1} + ... + z^{n_k}\right| \le \left|z^{n_1}\right| + ... + \left|z^{n_k}\right| = 1 + ... + 1 = k$.

Άσκηση 10

Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε $4z\bar{z} + z^2 + \bar{z}^2 + 4\,\mathrm{Im}(z) = 58$.

Λύση

Θέτοντας $z = x + yi$ έχουμε

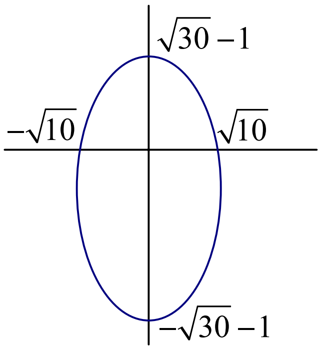
$$z\bar{z} = x^2 + y^2, \quad z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \quad \bar{z}^2 = x^2 - y^2 - 2xyi, \quad \mathrm{Im}(z) = y.$$

Αντικαθιστώντας στην αρχική ισότητα βρίσκουμε $6x^2+2y^2+4y=58$.

Συμπληρώνοντας τα τετράγωνα έχουμε

$$6x^2+2y^2+4y=58 \Leftrightarrow 6x^2+2(y^2+2y+1-1)=58 \Leftrightarrow$$
$$6x^2+2(y+1)^2=60 \Leftrightarrow \frac{x^2}{10}+\frac{(y+1)^2}{30}=1.$$

Συνεπώς το ζητούμενο σύνολο είναι μια έλλειψη όπως φαίνεται στο σχήμα.



Άσκηση 11

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x)=x^4-6x^3-2x^2+ax+b,\ a,b\in\mathbb{R}$, *αν γνωρίζουμε ότι μια ρίζα του είναι ο μιγαδικός αριθμός* $2+i$

Λύση

Από την Πρόταση 16 συνάγουμε ότι και ο 2-i είναι ρίζα του $f(x)$. Από το Θεώρημα 15 έπεται ότι το πολυώνυμο $(x-(2+i))(x-(2-i))=x^2-4x+5$ διαιρεί το $f(x)$ επί του $\mathbb{C}$. Πραγματοποιώντας τη διαίρεση αυτή κατά τα γνωστά βρίσκουμε ότι $f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15)+(a-50)x+75+b$. Επειδή το υπόλοιπο οφείλει να είναι μηδέν, έχουμε

$$f(x)=(x^2-4x+5)(x^2-2x-15).$$

Για να βρούμε τις άλλες ρίζες του $f(x)$ λύνουμε την εξίσωση $x^2-2x-15=0$ και βρίσκουμε $x=\dfrac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(-15)}}{2}=5,-3.$

Τελικά οι ρίζες είναι οι $2+i,2-i,5,-3$.

Άσκηση 12

Αποδείξτε ότι το x^2-2x-1 *διαιρεί το* $f(x)=x^3+ax+b\in\mathbb{R}[x]$ *αν το υπόλοιπο της διαίρεσης του f(x) με το* $x-1$ *(αντίστοιχα,* $x-2$*) είναι –6 (αντίστοιχα –4).*

Λύση

Σύμφωνα με την Πρόταση 13 και την υπόθεση έχουμε τις σχέσεις

$f(1) = 1 + a + b = -6$
$f(2) = 8 + 2a + b = -4.$

Λύνοντας το σύστημα βρίσκουμε $a = -5, b = -2$, οπότε $f(x) = x^3 - 5x - 2$. Κάνοντας τη διαίρεση του $x^3 - 5x - 2$ με το $x^2 - 2x - 1$ βρίσκουμε μηδενικό υπόλοιπο,

$x^3 - 5x - 2 = \left(x^2 - 2x - 1\right)\left(x + 2\right)$.

Άσκηση 13

Αν τα υπόλοιπα των διαιρέσεων ενός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με τα $x-2$ και $x-3$ είναι αντίστοιχα 4,5, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-2)(x-3)$.

Λύση

Από τον Αλγόριθμο Διαίρεσης έχουμε $f(x) = (x-2)(x-3)q(x) + r(x)$ και το ζητούμενο υπόλοιπο $r(x)$ έχει βαθμό το πολύ 1. Άρα είναι της μορφής $r(x) = ax + b$. Από την υπόθεση και την Πρόταση 13 έχουμε $f(2) = 4, f(3) = 5$. Θέτοντας διαδοχικά $x = 2$ και $x = 3$ στη σχέση $f(x) = (x-2)(x-3) + ax + b$ παίρνουμε το σύστημα

$$2a + b = 4$$
$$3a + b = 5.$$

Άρα $a = 1, b = 2$ και το ζητούμενο υπόλοιπο είναι $x + 2$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

Ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι αντιστρέψιμες;

1. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^2 + 6x$
2. $g : [-3, \infty) \to [-9, \infty), f(x) = x^2 + 6x$
3. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^6 + 6x^2 - 10$

Υπόδειξη Η f δεν είναι επί (βλ. Λυμένη Άσκηση 2), η g είναι αντιστρέψιμη (βλ. Λυμένη Άσκηση 2), και η h δεν είναι 1-1 αφού $h(1) = h(-1)$.

Άσκηση 2

Εξετάστε για ποια $k \in \mathbb{R}$ οι παρακάτω απεικονίσεις είναι 1-1.

1. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=kx+3$
2. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x+2y,kx+10y)$.

Υπόδειξη Για το 2 βλ. Λυμένη Άσκηση 5. **Απάντηση** 1. $k\neq 0$, 2. $k\neq 5$.

Άσκηση 3

Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2, f(x,y)=(x,x+y)$. Για τη σύνθεση $f^{(2006)}$ βρείτε έναν τύπο της μορφής $f^{(2006)}(x,y)=(ax+by,cx+dy)$ με συγκεκριμένα $a,b,c,d\in\mathbb{R}$.

Υπόδειξη Για το ζητούμενο τύπο υπολογίστε τις συνθέσεις $f^{(2)}, f^{(3)}$. Τί παρατηρείτε; Αποδείξτε έναν γενικό τύπο με επαγωγή (βλέπε Λυμένη Άσκηση 5).

Άσκηση 4

Να λυθεί η εξίσωση $z^6+z^4+z^2+1=0$ και να γίνει η γραφική παράσταση των λύσεων.

Υπόδειξη $z^6+z^4+z^2+1=\left(z^2\right)^3+\left(z^2\right)^2+z^2+1=\dfrac{z^8-1}{z^2-1}$. Εφαρμόστε το Θεώρημα 10.

Απάντηση Οι λύσεις είναι $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, i, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}, -i, \dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Τα σημεία αυτά αντιστοιχούν στις 6 κορυφές του κανονικού οκταγώνου που δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα των x.

Άσκηση 5

Να περιγραφεί γεωμετρικά το σύνολο των σημείων του επιπέδου που είναι οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών z τέτοιων ώστε

1. $4z\bar{z}+z^2+\bar{z}^2=60$.
2. $|z-\alpha|=|z-\beta|$, όπου $\alpha,\beta\in\mathbb{C},\alpha\neq\beta$.

Υπόδειξη 1.Βλ. Λυμένη Άσκηση 10. **Απάντηση** 1. Πρόκειται για την έλλειψη $\dfrac{x^2}{10}+\dfrac{y^2}{30}=1$. 2. Από την υπόθεση έπεται ότι το σημείο $M(z)$ ισαπέχει από τα σημεία

$M(\alpha), M(\beta)$. Άρα το σύνολο των $M(z)$ είναι η μεσοκάθετος του ευθυγράμμου τμήματος με άκρα τα $M(\alpha), M(\beta)$.

Άσκηση 6

Έστω $z_1, z_2 \in \mathbb{C}-\{0\}$, τέτοια ώστε $\frac{z_1}{z_2}+\frac{z_2}{z_1} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $r \in \mathbb{R}$ έχουμε $|z_1+rz_2| = |z_1-rz_2|$.

Υπόδειξη Αποδείξτε ότι η αποδεικτέα σχέση ισοδυναμεί με την: για κάθε $r \in \mathbb{R}$, $\left|\frac{z_1}{z_2}+r\right|^2 = \left|\frac{z_1}{z_2}-r\right|^2$, και αυτή ισοδυναμεί με τη $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$. Στη συνέχεια αποδείξτε ότι από την υπόθεση της άσκησης έπεται ότι $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C}-\mathbb{R}$.

Άσκηση 7

Να υπολογιστεί η δύναμη $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006}$.

Υπόδειξη $\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right) \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2006} = \ldots$ και εφαρμόστε το Θεώρημα του de Moivre. **Απάντηση** i.

Άσκηση 8

Αν το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ με το $x-1$ και $x-2$ είναι αντίστοιχα 2,3, να βρεθεί το υπόλοιπο της διαίρεσης του $f(x)$ με το γινόμενο $(x-1)(x-2)$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 13. **Απάντηση** $x+1$

Άσκηση 9

Δίνεται ότι μια ρίζα του πολυωνύμου $f(x)=x^3+ax^2+43x-65$ είναι η $x=5$. Να βρεθούν οι άλλες ρίζες.

Υπόδειξη Από τη σχέση $f(5)=0$ παίρνουμε $a=-11$. Στη συνέχεια διαιρούμε το $f(x)$ με το $x-5$. **Απάντηση** $3 \pm 2i$.

Άσκηση 10

Να βρεθούν οι ρίζες του πολυωνύμου $f(x) = x^4 - 8x^3 + 39x^2 - 62x + a$ αν γνωρίζουμε ότι μια από αυτές είναι η $3-4i$.

Υπόδειξη Βλ. Λυμένη Άσκηση 11. Απάντηση $1 \pm i, 3 \pm 4i$.