ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ (2003/2004)
(Απόδειξη διαίρεσης δύο αριθμών με τη μέθοδο της επαγωγής)

Να δειχτεί επαγωγικά ότι ο αριθμός $3\cdot 5^{2n+1}+2^{3n+1}$ διαιρείται με το 17 , $\forall n\in\mathbb{N}$

Υποδειγματική Λύση

Έστω $P(n)$ η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για $n=1$:

$3\cdot 5^{2+1}+2^{3+1}=3\cdot 125+16=391$ ➔ το 391 διαιρείται με το 17 $(\frac{391}{17}=23)$ ➔ $P(1)$ αληθής

Έστω ότι ισχύει για $n=k$:

Δηλαδή έστω ότι ο αριθμός $3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}$ διαιρείται με το 17 και επομένως ➔

$3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1}=17w$, $w\in\mathbb{Z}$

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n=k+1$:

(Δηλαδή ότι ο αριθμός $3\cdot 5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}$ διαιρείται με το 17)

$3\cdot 5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}=$

$$=3\cdot 5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}=$$

$$=3\cdot 5^{2k+2+1}+2^{3k+3+1}=$$

$$=3\cdot 25\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}=$$

$$=3\cdot(17+8)\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}=$$

$$=3\cdot 17\cdot 5^{2k+2+1}+8\cdot 3\cdot 5^{2k+1}+8\cdot 2^{3k+1}=$$

$$=3\cdot 17\cdot 5^{2k+1}+8\cdot(3\cdot 5^{2k+1}+2^{3k+1})=$$

$$=17\cdot(3\cdot 5^{2k+1})+8\cdot(17w)=17\cdot(3\cdot 5^{2k+1}+8w)$$

Και επειδή $3\cdot 5^{2k+1}+8w\in\mathbb{Z}$ ➔ ο ο αριθμός $3\cdot 5^{2(k+1)+1}+2^{3(k+1)+1}$ διαιρείται με το 17.

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει.

Άρα $P(n)$ αληθής