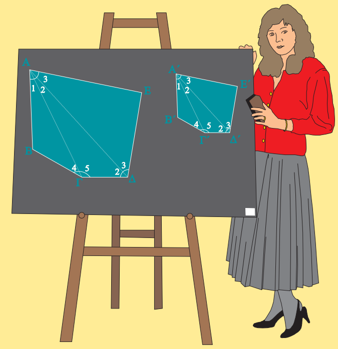
Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

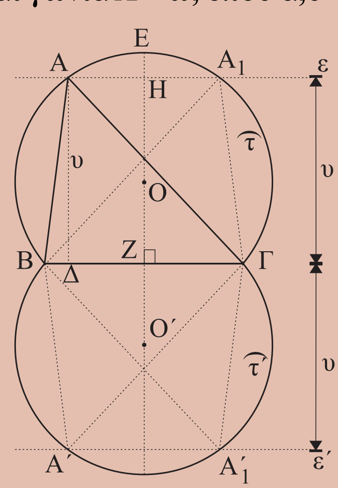
Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ=α, ύψος ΑΔ=υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α,υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω. Επειδή $\hat{A}$ = ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27

• **Σύνθεση.** Με χορδή τμήμα ΒΓ = α γράφουμε τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$ που δέχονται γωνία ω. Στη συνέχεια σε απόσταση ΖΗ = υ από τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής φέρουμε ευθείες ε, ε΄//ΒΓ που τέμνουν τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$. Αν Α είναι ένα από τα σημεία τομής των $Τ_1$, $Τ_2$, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{Α}$= ω, αφού το Α είναι σημείο π.χ. του τόξου $\overset{\frown}{\tau}$ τα σημεία του οποίου βλέπουν το ΒΓ υπό γωνία ω.

• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι γεωμετρικοί τόποι $Τ_1$ και $Τ_2$ να έχουν κοινά σημεία. Έτσι, αν ΑΔ<ΕΖ η ευθεία ε τέμνει το τόξο $\overset{\frown}{\tau}$ σε δύο σημεία Α και $Α_1$ και η ε΄ τέμνει το $\overset{\frown}{\tau}'$ στα Α΄ και $Α'_1$, οπότε έχουμε τέσσερα τρίγωνα τα οποία είναι ίσα μεταξύ τους (τρεις πλευρές ίσες), οπότε θεωρούμε ότι έχουμε μία λύση. Αν ΑΔ=ΕΖ, η ε έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}$, το Ε, οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο ΕΒΓ και η ε΄ έχει ένα κοινό σημείο με το $\overset{\frown}{\tau}'$, το Ε΄ , οπότε έχουμε ως λύση το ισοσκελές τρίγωνο Ε΄ΒΓ. Τα τρίγωνα αυτά όμως είναι ίσα, οπότε έχουμε μία μόνο λύση. Τέλος, αν ΑΔ>ΕΖ δεν υπάρχουν κοινά σημεία των $Τ_1$, $Τ_2$ και το πρόβλημα είναι αδύνατο.

ΣΧΟΛΙΟ

Στο παραπάνω πρόβλημα, για να κατασκευάσουμε το τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου γνωρίζουμε την πλευρά ΒΓ = α, πρέπει να προσδιορίσουμε ακόμα την κορυφή Α. Η κορυφή αυτή έχει δύο ιδιότητες:

(i) βλέπει το τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία ω και

(ii) απέχει από την πλευρά ΒΓ, γνωστή απόσταση υ.

Επομένως το Α είναι η τομή των δύο γεωμετρικών τόπων, τόξου και ευθείας αντίστοιχα.

Γενικά, όταν ένα πρόβλημα είναι ή ανάγεται στον προσδιορισμό ενός σημείου, τότε βρίσκουμε δύο γεωμετρικούς τόπους $Τ_1$, $Τ_2$ στους οποίους οφείλει, σύμφωνα με τα δεδομένα, να βρίσκεται το σημείο αυτό και η τομή των $Τ_1$, $Τ_2$ είναι το ζητούμενο σημείο.

Η μέθοδος της χρησιμοποίησης των γεωμετρικών τόπων στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών ανάγεται στον Πλάτωνα.

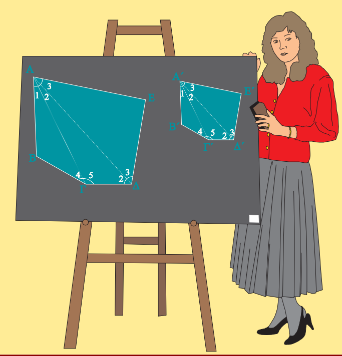
Δραστηριότητες

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των χορδών δοσμένου κύκλου που:

i) είναι παράλληλες σε δοσμένη ευθεία ή

ii) ισαπέχουν από το κέντρο του κύκλου ή

iii) συντρέχουν σε ένα σημείο.



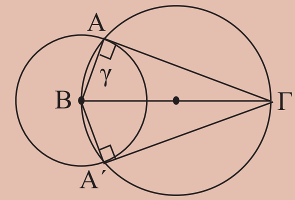
Στη συνέχεια δίνουμε ορισμένα ακόμα παραδείγματα γεωμετρικών κατασκευών με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται η υποτείνουσα ΒΓ=α και μία κάθετη πλευρά του ΑΒ = γ, όπου α και γ γνωστά τμήματα.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΑΒΓ είναι το ζητούμενο τρίγωνο με $\hat{A} = 1\llcorner$, ΒΓ = α και ΑΒ = γ (σχ.28). Ας θεωρήσουμε γνωστή την πλευρά ΒΓ. Το σημείο Α:
(i) απέχει απόσταση γ από το Β, άρα ανήκει στον κύκλο (Β,γ), και
(ii) βλέπει το ΒΓ υπό ορθή γωνία, άρα ανήκει στον κύκλο διαμέτρου ΒΓ.



Σχήμα 28

• **Σύνθεση.** Κατασκευάζουμε τους δύο κύκλους (σχ.28) οι οποίοι τέμνονται στα Α και Α′. Σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′ΒΓ που είναι λύσεις του προβλήματος σε διαφορετικές θέσεις.

• **Απόδειξη.** Το τρίγωνο που κατασκευάσαμε έχει $\hat{A} = 1\llcorner$, επειδή βαίνει σε ημικύκλιο, και ΑΒ = γ ως ακτίνα του κύκλου (Β,γ).

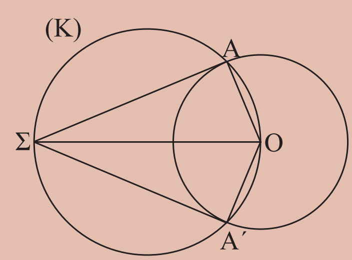
• **Διερεύνηση.** Για να υπάρχει λύση πρέπει οι δύο κύκλοι να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει όταν α > γ. Όταν α ≤ γ, είναι φανερό ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Σ εκτός αυτού. Να κατασκευασθεί εφαπτομένη του κύκλου η οποία να διέρχεται από το Σ.

Λύση

• **Ανάλυση.** Ας υποθέσουμε ότι ΣΑ είναι μία εφαπτομένη του κύκλου από το Σ, όπου Α το σημείο επαφής (σχ.29). Φέρουμε την ακτίνα ΟΑ, οπότε η γωνία $O\hat{A}\Sigma$ είναι ορθή και επομένως το Α είναι σημείο του γνωστού κύκλου (Κ) με διάμετρο το γνωστό τμήμα ΟΣ. Άρα το Α είναι κοινό σημείο του (Ο,R) και του (Κ). Επομένως το Α προσδιορίζεται, οπότε προσδιορίζεται και η ΣΑ.



Σχήμα 29

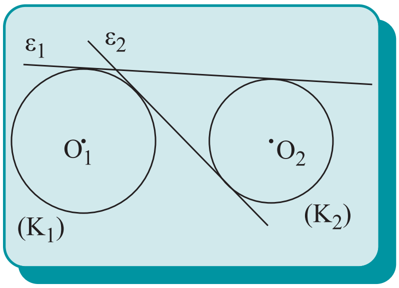
• **Σύνθεση.** Με διάμετρο ΟΣ γράφουμε κύκλο (Κ), ο οποίος τέμνει τον (Ο,R) στα σημεία Α και Α′. Φέρουμε τις ευθείες ΣΑ και ΣΑ′ οι οποίες είναι οι ζητούμενες εφαπτόμενες.

• **Απόδειξη.** Είναι $O\hat{A}\Sigma = O\hat{A}'\Sigma = 1\llcorner$, ως εγγεγραμμένες στον κύκλο (Κ) οι οποίες βαίνουν σε ημικύκλια. Άρα οι ακτίνες ΟΑ και ΟΑ′ είναι κάθετες αντίστοιχα στις ΣΑ και ΣΑ′ και επομένως οι ΣΑ και ΣΑ′ είναι εφαπτόμενες του κύκλου (Ο,R).

• **Διερεύνηση.** Το πρόβλημα έχει πάντοτε δύο λύσεις, γιατί οι κύκλοι (K) και (O,R) τέμνονται αφού ο (K) διέρχεται από το εσωτερικό σημείο O και από το εξωτερικό σημείο Σ του (O,R).

Συμπέρασμα:
Από οποιοδήποτε εξωτερικό σημείο ενός κύκλου φέρονται ακριβώς δύο ευθείες εφαπτόμενες στον κύκλο.

• *Κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων*



Σχήμα 30

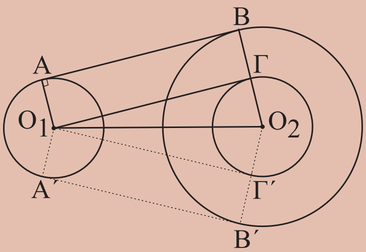
Ας θεωρήσουμε δύο κύκλους (K_1) και (K_2). Μία ευθεία που εφάπτεται και στους δύο κύκλους λέγεται ***κοινή εφαπτομένη*** τους. Μία κοινή εφαπτομένη δύο κύκλων (σχ.30) χαρακτηρίζεται ως ***εξωτερική***, όπως η ε_1, όταν οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της και ως ***εσωτερική***, όπως η ε_2, όταν οι κύκλοι βρίσκονται εκατέρωθεν αυτής.
Στο επόμενο πρόβλημα δίνουμε την κατασκευή των κοινών εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ), (O_2,R) με $R>\rho$ και $O_1O_2>R-\rho$. Να κατασκευάσετε τις κοινές εξωτερικές εφαπτόμενές τους.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω AB μία κοινή εξωτερική εφαπτομένη των κύκλων (O_1,ρ), (O_2,R), όπου A, B τα σημεία επαφής της με τους κύκλους αυτούς αντίστοιχα (σχ.31). Τότε οι ακτίνες O_1A, O_2B είναι κάθετες στην AB και επομένως παράλληλες. Από το O_1 φέρουμε την παράλληλη προς την AB, που τέμνει την O_2B στο Γ, οπότε το τετράπλευρο $ΑΒΓO_1$ είναι ορθογώνιο. Έτσι $O_1Γ \perp O_2Γ$ οπότε ο κύκλος κέντρου O_2 και ακτίνας $O_2Γ = O_2B - BΓ = O_2B - O_1A = R - \rho$ εφάπτεται στην $O_1Γ$ στο Γ.



Σχήμα 31

• **Σύνθεση.** Με κέντρο O_2 και ακτίνα $R-\rho$ γράφουμε κύκλο και από το O_1 φέρουμε τις εφαπτόμενες του $O_1Γ$ και $O_1Γ'$ αντίστοιχα. Φέρουμε τις $O_2Γ$, $O_2Γ'$ που τέμνουν τον κύκλο (O_2,R) στα B, B′ και στη συνέχεια φέρουμε τις ακτίνες O_1A, O_1A' του κύκλου (O_1,ρ) παράλληλες προς τις O_2B, O_2B' αντίστοιχα. Τότε οι ευθείες AB και A′B′ είναι οι ζητούμενες κοινές εξωτερικές εφαπτόμενες των κύκλων.

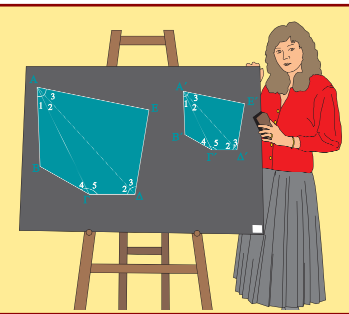
• **Απόδειξη.** Το τετράπλευρο ΑΒΓO_1 έχει, από την κατασκευή, O_1Α//ΓΒ και ΓΒ = = O_2Β – O_2Γ = R – (R –ρ) = O_1Α, δηλαδή O_1Α=//ΓΒ, οπότε είναι παραλληλόγραμμο. Επειδή η γωνία του $\hat{\Gamma}$ είναι ορθή, αφού η O_1Γ είναι εφαπτομένη του κύκλου (O_2, R – ρ) το ΑΒΓO_1 είναι ορθογώνιο. Άρα οι ακτίνες O_1Α και O_2Β είναι κάθετες στην ΑΒ και επομένως η ΑΒ είναι κοινή εφαπτομένη των δύο κύκλων. Η ΑΒ είναι εξωτερική εφαπτομένη αφού οι κύκλοι είναι προς το ίδιο μέρος της. Όμοια αποδεικνύεται ότι και η Α΄Β΄ είναι κοινή εξωτερική εφαπτομένη.

• **Διερεύνηση.** Από την προηγούμενη κατασκευή προκύπτει ότι το πρόβλημα έχει λύση όταν είναι δυνατή η χάραξη των εφαπτομένων O_1Γ και O_1Γ΄ από το O_1 προς τον κύκλο (O_2, R – ρ). Αυτό όμως είναι δυνατό όταν το O_1 είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O_2, R – ρ), το οποίο ισχύει αφού από την υπόθεση έχουμε ότι O_1O_2> R – ρ.

Επομένως, όταν O_1O_2> R – ρ υπάρχουν δύο εξωτερικές κοινές εφαπτόμενες των κύκλων (O_1,ρ) και (O_2,R).

Δραστηριότητα

Δίνονται δύο κύκλοι (O_1,ρ) και (O_2,R) με O_1O_2 > R + ρ. Να κατασκευάσετε τις κοινές εσωτερικές εφαπτόμενές τους. Στη συνέχεια να εξετάσετε το πλήθος των κοινών εσωτερικών και εξωτερικών εφαπτομένων δύο κύκλων ανάλογα με τις σχετικές θέσεις τους.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που*

i) έχουν απόσταση ρ από ένα σταθερό σημείο Ο,

ii) ισαπέχουν από δύο σταθερά σημεία Α και Β,

iii) έχουν απόσταση λ από μία ορισμένη ευθεία ε,

iv) ισαπέχουν από τις πλευρές μίας γωνίας,

v) ισαπέχουν από δύο τεμνόμενες ευθείες,

vi) ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες,

vii) βλέπουν ένα δοσμένο τμήμα ΑΒ υπό ορισμένη γωνία ω.

2. *Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ κατασκευάζεται όταν δίνονται:*

i) δύο κάθετες πλευρές του.	***Σ***	***Λ***
ii) μία κάθετη πλευρά του και η υποτείνουσα.	***Σ***	***Λ***
iii) μία οξεία γωνία του.	***Σ***	***Λ***
iv) η υποτείνουσα και μία οξεία γωνία του.	***Σ***	***Λ***
v) η διάμεσος που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα και η υποτείνουσα.	***Σ***	***Λ***

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των θέσεων:*

i) του δρομέα που κινείται σε ένα ευθύγραμμο διάδρομο ισαπέχοντας από τις πλευρές του,

ii) ενός τεχνητού δορυφόρου της Γης που κινείται σε απόσταση 10km πάνω από αυτή.

2. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των κέντρων των κύκλων γνωστής ακτίνας:
i) που κυλίονται στο εσωτερικό ενός μεγαλύτερου γνωστού κύκλου,
ii) που διέρχονται από ένα σταθερό σημείο.

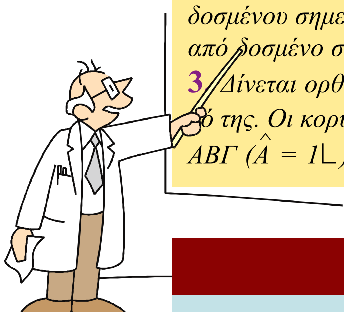
3. Το σημείο στο οποίο είναι κρυμμένος ένας θησαυρός απέχει 4m από ένα δέντρο Δ και ισαπέχει από δύο άλλα δέντρα Α και Β. Να βρεθεί η θέση του θησαυρού.

4. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των μέσων των ακτίνων δοσμένου κύκλου.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος της κορυφής Α της ορθής γωνίας ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που έχει δοσμένη υποτείνουσα.

2. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των προβολών του δοσμένου σημείου Α πάνω στις ευθείες που διέρχονται από δοσμένο σημείο Β.



3. Δίνεται ορθή γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α στο εσωτερικό της. Οι κορυφές Β και Γ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) κινούνται πάνω στις Oy και Ox αντίστοιχα. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του μέσου Μ της υποτείνουσας ΒΓ.

4. Να κατασκευασθεί ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) του οποίου δίνονται:
i) η διάμεσος ΑΜ=μ και μία κάθετη πλευρά.
ii) η διάμεσος ΑΜ=μ και το ύψος ΑΔ = λ.

Σύνθετα Θέματα

1. Από ένα μεταβλητό σημείο Ρ της πλευράς ΒΓ ενός τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθείες παράλληλες προς τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ που τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο του μέσου Μ του ΖΕ.

2. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ του οποίου δίνονται:
i) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΑΜ = μ.
ii) η πλευρά ΒΓ=λ, η γωνία $\hat{A}$ = ω και η διάμεσος ΒΝ = μ.

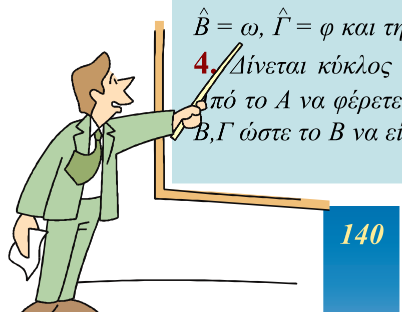
3. Να κατασκευάσετε ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που έχει πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ ίσες με τα γνωστά τμήματα κ, λ, μ, ν αντίστοιχα, και η γωνία του $\hat{A}$ είναι ίση με δοσμένη γωνία ω.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ ορθογώνιο στο Α. Από τα άκρα Β,Γ της υποτείνουσας ΒΓ φέρουμε κάθετες Βx και Βy στη ΒΓ και προς το ίδιο μέρος της ΒΓ. Από το μέσο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΑΓ, που τέμνει την Γy στο Ε και κάθετη στην ΑΒ που τέμνει την Βx στο Δ. Να αποδειχθεί ότι:
i) τα σημεία Δ,Α,Ε είναι συνευθειακά,
ii) τα τετράπλευρα ΑΔΒΜ και ΑΜΓΕ είναι εγγράψιμα σε κύκλο,
iii) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΔΜΕ εφάπτεται στη ΒΓ.

2. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει σταθερή την πλευρά ΒΓ και η κορυφή Α μεταβάλλεται έτσι, ώστε η διαφορά των πλευρών ΑΒ και ΑΓ να είναι σταθερή. Αν Μ είναι η προβολή της κορυφής Β πάνω στη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ.

3. Να κατασκευάσετε τρίγωνο ΑΒΓ από τις γωνίες $\hat{B}$ = ω, $\hat{Γ}$ = φ και την περίμετρό του δ.



4. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και σημείο Α εκτός αυτού. Από το Α να φέρετε ευθεία, που τέμνει τον κύκλο στα Β,Γ ώστε το Β να είναι μέσο του ΑΓ.

5. Δίνεται εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Με χορδές τις πλευρές του γράφουμε μέσα σε αυτό τόξα, που τέμνονται ανά δύο στα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ. Να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι εγγράψιμο. (Οι έξι κύκλοι του Miquel).

6. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΖΕ, ΒΖΔ και ΓΕΔ διέρχονται από το ίδιο σημείο.

7. Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος και Ε, Ζ σημεία των ΑΓ, ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες ΒΕ, ΔΕ, ΓΖ και ΑΖ σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

8. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ορθόκεντρο του Η. Αν M_1, M_2, M_3 είναι τα μέσα των ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ αντίστοιχα, AH_1, BH_2, $ΓH_3$ τα ύψη του και Z_1, Z_2, Z_3 τα μέσα των ΗΑ, ΗΒ, ΗΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
i) το τετράπλευρο $H_1M_1M_2M_3$ είναι εγγράψιμο,
ii) το τετράπλευρο $Z_1H_1M_1M_2$ είναι εγγράψιμο,
iii) τα σημεία M_i, H_i, Z_i, i = 1, 2, 3 είναι ομοκυκλικά (Κύκλος των 9 σημείων ή κύκλος του Euler).