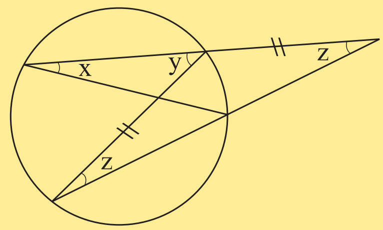
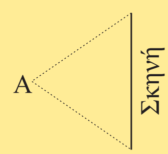
iv) $x + y = 2z$,
v) καμία από τις παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. *Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα "Α". Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α .*

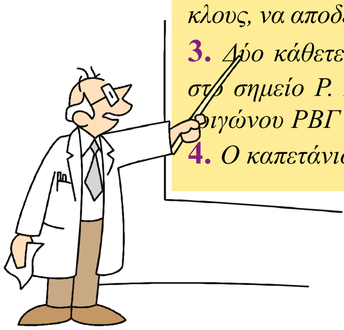


Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.*

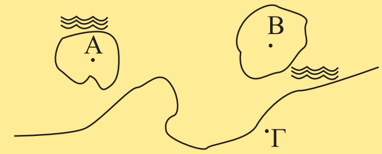
2. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.*

3. *Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.*



4. *Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ . Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι*

$$A\hat{I}B = 100°,\ B\hat{I}\Gamma = 125°,\ \Gamma\hat{I}A = 135°.$$



Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'//ΓΓ'.*

2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.*

3. *Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ=ΡΑ.*

Εγγεγραμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγεγραμμένο* σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τετραπλεύρου.

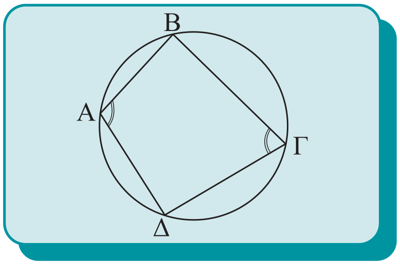
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:
(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.
(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

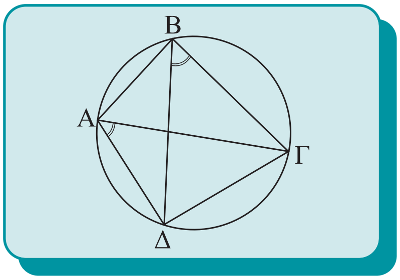
Απόδειξη

(i) Η γωνία $\hat{A}$ βαίνει στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta}$, ενώ η $\hat{\Gamma}$ στο $\overset{\frown}{BA\Delta}$, με $\overset{\frown}{B\Gamma\Delta} + \overset{\frown}{BA\Delta} = 4\llcorner$ (σχ.16). Επομένως $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$.

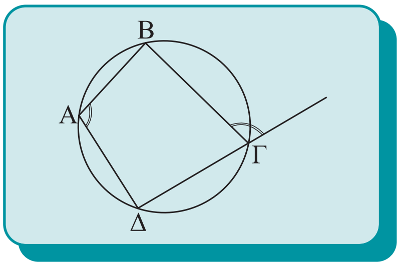
(ii) Δύο οποιεσδήποτε διαδοχικές κορυφές του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ (π.χ. οι Α, Β) είναι και κορυφές δύο ίσων εγγεγραμμένων γωνιών ($\Delta\hat{A}\Gamma$ και $\Delta\hat{B}\Gamma$), που βαίνουν στο ίδιο τόξο $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$, που ορίζει η απέναντι πλευρά ΓΔ (σχ.17).



Σχήμα 16



Σχήμα 17



Σχήμα 18

ΠΟΡΙΣΜΑ

Κάθε εξωτερική γωνία ενός εγγεγραμμένου τετραπλεύρου ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του.

6.6 Το εγγράψιμο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγράψιμο* όταν μπορεί να γραφεί κύκλος που να διέρχεται και από τις τέσσερις κορυφές του.

Η μελέτη των εγγράψιμων τετραπλεύρων προέκυψε από το ερώτημα αν τέσσερα σημεία του επιπέδου (ανά τρία μη συνευθειακά) είναι ή όχι ομοκυκλικά.
Γνωρίζουμε βέβαια ότι τρία σημεία του επιπέδου μη συνευθειακά ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αυτό όμως δε συμβαίνει απαραίτητα και για τέσσερα σημεία, π.χ. οι κορυφές ενός τυχαίου παραλληλογράμμου, το οποίο δεν είναι ορθογώνιο, δεν είναι δυνατόν να ανήκουν στον ίδιο κύκλο, αφού οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες και αν δεν είναι και οι δύο ορθές δεν θα είναι παραπληρωματικές.
Απομένει λοιπόν να καθορίσουμε κάτω από ποιες συνθήκες είναι τέσσερα σημεία ομοκυκλικά ή, ισοδύναμα, κάτω από ποιες προϋποθέσεις (**κριτήρια**) ένα τετράπλευρο είναι εγγράψιμο σε κύκλο.

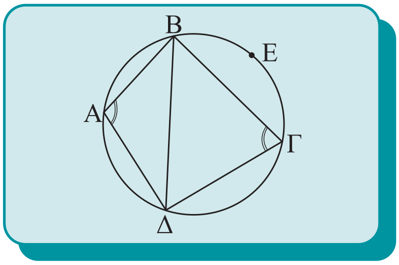
Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο σε κύκλο, αν ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις:

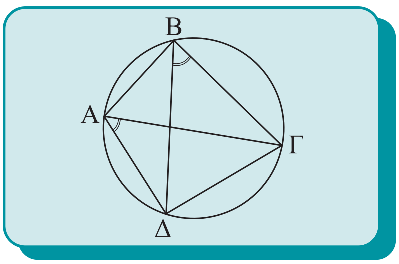
(i) Δύο απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Μία πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.

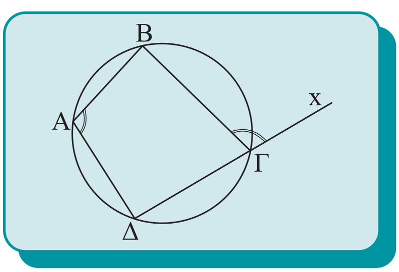
(iii) Μία εξωτερική του γωνία ισούται με την απέναντι εσωτερική γωνία του τετραπλεύρου.



Σχήμα 19



Σχήμα 20



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Έστω $\hat{\text{Α}} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$. Φέρουμε τον κύκλο που ορίζουν τα σημεία Α, Β, Δ και τη χορδή του ΒΔ. Τα σημεία Α, Γ βρίσκονται εκατέρωθεν της ΒΔ, οπότε κάθε εγγεγραμμένη γωνία στο τόξο $\overset{\frown}{\text{ΒΑΔ}}$ ισούται με τη $\hat{\Gamma}$, ενώ κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο $\overset{\frown}{\text{ΒΕΔ}}$ (σχ.19) ισούται με την παραπληρωματική της, δηλαδή την $\hat{\text{Α}}$. Επομένως το Γ είναι σημείο του $\overset{\frown}{\text{ΒΕΔ}}$ και ομοκυκλικό με τα Α, Β, Δ.

(ii) Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ τέτοιο ώστε

$$\Delta\hat{\text{Α}}\Gamma = \Delta\hat{\text{Β}}\Gamma = \varphi.$$

Τότε τα Α,Β ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο των σημείων του επιπέδου από τα οποία το τμήμα ΓΔ φαίνεται υπό ορισμένη γωνία φ. Ο γεωμετρικός αυτός τόπος είναι (βλ. § 6.4) δύο συμμετρικά τόξα ως προς το ΓΔ. Τα Α,Β όμως βρίσκονται στο ίδιο μέρος της ΓΔ, συνεπώς ανήκουν στο ίδιο τόξο, επομένως τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι ομοκυκλικά.

(iii) Έστω ότι $x\hat{\Gamma}\text{Β} = \hat{\text{Α}}$ (σχ. 21), τότε $\hat{\text{Α}} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, επομένως το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο γιατί έχει δύο απέναντι γωνίες του παραπληρωματικές, λόγω του κριτηρίου (i).

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η *Περιγεγραμμένο και περιγράψιμο τετράπλευρο σε κύκλο*

Ένα τετράπλευρο, του οποίου οι πλευρές εφάπτονται στον ίδιο κύκλο, λέγεται *περιγεγραμμένο* στον κύκλο αυτό, ενώ ο κύκλος λέγεται *εγγεγραμμένος* στο τετράπλευρο αυτό.

(Α) Να αποδειχθούν οι ιδιότητες ενός περιγεγραμμένου τετραπλεύρου ΑΒΓΔ:

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι το κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

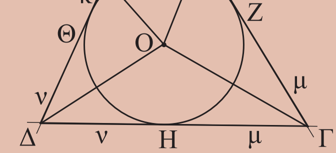
(Β) Να αποδείξετε ότι για να είναι ένα τετράπλευρο περιγράψιμο σε κύκλο αρκεί να ισχύει μία από τις ακόλουθες προτάσεις :

(i) Οι διχοτόμοι των γωνιών του διέρχονται από το ίδιο σημείο.

(ii) Τα αθροίσματα των απέναντι πλευρών του είναι ίσα.

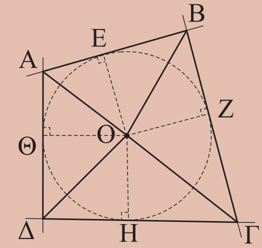
Απόδειξη

(Α) Απλή (βλ. σχ.22).



Σχήμα 22

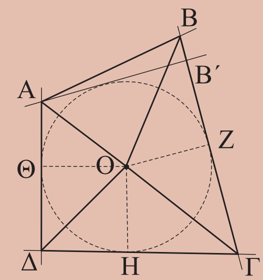
(Β) (i) Από το σημείο τομής Ο των διχοτόμων φέρουμε τις καθέτες ΟΕ, ΟΖ, ΟΗ, ΟΘ στις πλευρές του τετραπλεύρου ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα (σχ. 23). Το Ο ως σημείο της διχοτόμου της γωνίας $\hat{Α}$ ισαπέχει από τις πλευρές της ΑΒ, ΑΔ, συνεπώς ΟΕ=ΟΘ. Ανάλογα έχουμε ότι ΟΕ=ΟΖ=ΟΗ, οπότε τα σημεία Ε, Ζ, Η, Θ ανήκουν σε κύκλο (Ο,ΟΕ) και το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι περιγράψιμο.



Σχήμα 23

(ii) Έστω ότι ΑΒ+ΓΔ = ΑΔ+ΒΓ (1). Θεωρούμε τις διχοτόμους των γωνιών $\hat{Γ}$, $\hat{Δ}$, οι οποίες τέμνονται στο σημείο Ο και από το Ο φέρουμε τις κάθετες στις πλευρές των γωνιών αυτών, ΟΘ⊥ΑΔ, ΟΗ⊥ΓΔ και ΟΖ⊥ΒΓ (σχ.24). Τότε ΟΘ = ΟΗ = ΟΖ και ο κύκλος (Ο,ΟΘ) εφάπτεται στις τρεις πλευρές του ΑΒΓΔ. Έστω ότι δεν εφάπτεται στην ΑΒ. Φέρουμε την εφαπτομένη από το Α στον κύκλο (Ο,ΟΘ) η οποία τέμνει την ευθεία ΒΓ σε σημείο Β΄. Το τετράπλευρο ΑΒ΄ΓΔ είναι περιγεγραμμένο, οπότε

$$ΑΒ' + ΓΔ = ΑΔ + Β'Γ \qquad (2).$$



Σχήμα 24

Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (1) και (2) έχουμε ότι:

$$ΑΒ – ΑΒ' = ΒΓ – Β'Γ \quad \text{ή} \quad ΑΒ = ΑΒ' + ΒΒ',$$

το οποίο είναι άτοπο, επομένως ο κύκλος εφάπτεται και στην πλευρά ΑΒ.

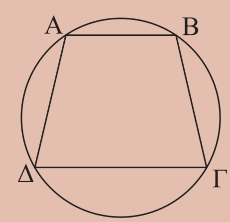
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να αποδειχθεί ότι κάθε ισοσκελές τραπέζιο είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Αν το ΑΒΓΔ (σχ.25) είναι ισοσκελές τραπέζιο θα είναι $\hat{Α} = \hat{Β}$, $\hat{Γ} = \hat{Δ}$ και $\hat{Α} + \hat{Δ} = \hat{Β} + \hat{Γ} = 2∟$.

Επομένως θα είναι και $\hat{Α} + \hat{Γ} = 2∟$, οπότε είναι εγγράψιμο.

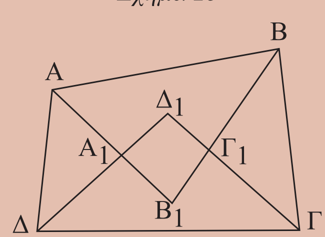


Σχήμα 25

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Να αποδειχθεί ότι οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τετραπλεύρου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.

Απόδειξη



Σχήμα 26

Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ και $Α_1Β_1Γ_1Δ_1$ το τετράπλευρο που σχηματίζουν οι διχοτόμοι των γωνιών του (σχ. 26). Τότε έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 = Α\hat{Α}_1Δ = 2∟ – \left(\frac{\hat{Α} + \hat{Δ}}{2}\right) \quad \text{και} \quad Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = Β\hat{Γ}_1Γ = 2∟ – \left(\frac{\hat{Β} + \hat{Γ}}{2}\right).$$

Προσθέτοντας κατά μέλη έχουμε ότι

$$Β_1\hat{Α}_1Δ_1 + Δ_1\hat{Γ}_1Β_1 = 4∟ – \left(\frac{\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} + \hat{Δ}}{2}\right) = 2∟,$$

επομένως το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι εγγράψιμο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Σε ένα εγγεγραμμένο τετράπλευρο:*

i) Τα αθροίσματα των απέναντι γωνιών είναι ίσα. Σ Λ

ii) Κάθε πλευρά φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες. Σ Λ

Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις προηγούμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Αν ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο σε κύκλο τετράπλευρο τότε:*

α. $\hat{A} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 2\llcorner$ β. $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ γ. $\hat{A} = \hat{\Delta}_{\varepsilon\xi}$

δ. $\hat{A} = \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ ε. $\hat{B} = \hat{\Delta}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. *Από τέσσερα μη συνευθειακά σημεία διέρχεται πάντοτε ένας κύκλος;*

4. *i) Πότε ένα τετράπλευρο λέγεται εγγράψιμο;*

ii) Αν οι μεσοκάθετοι των πλευρών ενός τετραπλεύρου διέρχονται από το ίδιο σημείο, τότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο;

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

5. *Ποια είναι τα κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο εγγράψιμο;*

6. *Ποια από τα τετράπλευρα: παραλληλόγραμμο, ορθογώνιο, ρόμβος, τετράγωνο και τραπέζιο είναι εγγράψιμα;*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε ένα εγγράψιμο τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι* $\hat{A} = 120°$ *και* $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 80°$. *Να βρείτε τις γωνίες* $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$ *και* $\hat{\Delta}$ *του τετραπλεύρου.*

2. *Αν ένας ρόμβος είναι εγγεγραμμένος σε κύκλο, να αποδείξετε ότι είναι τετράγωνο.*

3. *Να αποδείξετε ότι κάθε εγγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι κάθε περιγεγραμμένο παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, του οποίου οι διαγώνιοι τέμνονται στο κέντρο του εγγεγραμμένου κύκλου.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Από τα Α και Β φέρουμε ευθείες που τέμνουν τον ένα κύκλο στα Γ και Γ΄και τον άλλο στα Δ και Δ΄ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΓΓ΄//ΔΔ΄.*

2. *Ένας κύκλος (Κ) διέρχεται από τις κορυφές Β και Γ τριγώνου ΑΒΓ και τέμνει τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ στα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη ε του περιγεγραμμένου κύκλου στο Α.*

3. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ΑΔ, ΒΕ, ΓΖ ενός τριγώνου ΑΒΓ διχοτομούν τις γωνίες του τριγώνου ΔΕΖ.*

4. *Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες στα άκρα δύο κάθετων χορδών κύκλου σχηματίζουν εγγράψιμο τετράπλευρο.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ο περιγεγραμμένος κύκλος του (Ο,R). Αν ΒΔ και ΓΕ είναι ύψη του τριγώνου ΑΒΓ να αποδείξετε ότι ΟΑ⊥ΔΕ (Θεώρημα Nagel).*

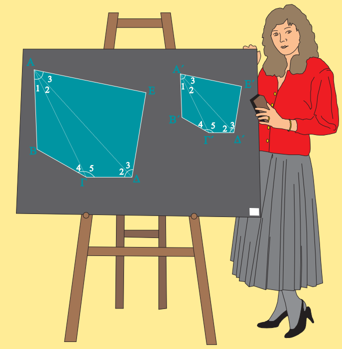
2. *Δίνεται μία χορδή ΒΓ ενός κύκλου (Ο,R) και οι εφαπτόμενες* ε_1 *και* ε_2 *στα άκρα της. Από ένα τυχαίο σημείο Μ της ΒΓ φέρουμε κάθετη στην ΟΜ, που τέμνει τις* ε_1 *και* ε_2 *στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΜ = ΜΕ.*

3. *Να αποδείξετε ότι οι προβολές κάθε σημείου του περιγεγραμμένου κύκλου τριγώνου πάνω στις πλευρές του είναι σημεία συνευθειακά (ευθεία Simson).*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Αν οι περιγεγραμμένοι κύκλοι των τριγώνων ΑΔΒ και ΑΔΓ τέμνουν τις πλευρές ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΓΕ = ΒΖ.*

Δραστηριότητα

Να εξετασθεί η ύπαρξη κύκλου που διέρχεται από:
i) δύο δοσμένα σημεία,
ii) τρία δοσμένα σημεία,
iii) τέσσερα δοσμένα σημεία,
και η μοναδικότητά του σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις.



6.7 Γεωμετρικοί τόποι και γεωμετρικές κατασκευές με τη βοήθεια των γεωμετρικών τόπων

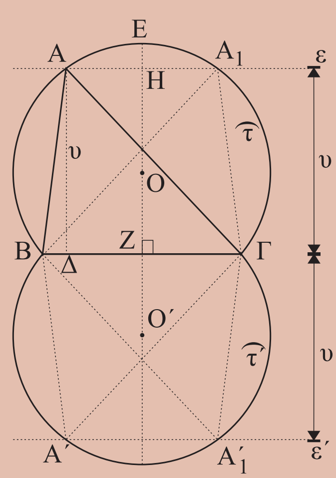
Σε προηγούμενα κεφάλαια συναντήσαμε ορισμένους βασικούς γεωμετρικούς τόπους, όπως ο κύκλος, η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος, η διχοτόμος μίας γωνίας, η μεσοπαράλληλος δύο παράλληλων ευθειών και τέλος το τόξο γνωστής χορδής ΑΒ, τα σημεία του οποίου βλέπουν το τμήμα ΑΒ υπό δοσμένη γωνία φ.
Οι γεωμετρικοί αυτοί τόποι μας είναι χρήσιμοι στη λύση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Ας δούμε ένα παράδειγμα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ που έχει ΒΓ=α, ύψος ΑΔ=υ και γωνία $\hat{A}$ = ω, όπου α,υ γνωστά τμήματα και ω γνωστή γωνία.

Λύση

• **Ανάλυση.** Έστω ΑΒΓ το ζητούμενο τρίγωνο (σχ.27) που έχει ΒΓ = α, ύψος ΑΔ = υ και γωνία $\hat{A}$ = ω. Επειδή $\hat{A}$ = ω η κορυφή Α βλέπει γνωστό τμήμα ΒΓ υπό γνωστή γωνία, άρα είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_1 που αποτελείται από τα τόξα $\overset{\frown}{\tau}$ και $\overset{\frown}{\tau}'$, που γράφονται με χορδή τη ΒΓ εκατέρωθεν αυτής και δέχονται το καθένα γωνία ω. Επίσης, αφού το Α απέχει από τη ΒΓ γνωστή απόσταση υ, είναι σημείο του γεωμετρικού τόπου T_2 που αποτελείται από δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ και εκατέρωθεν αυτής σε απόσταση υ. Άρα η κορυφή Α είναι η τομή των γεωμετρικών τόπων T_1 και T_2.



Σχήμα 27