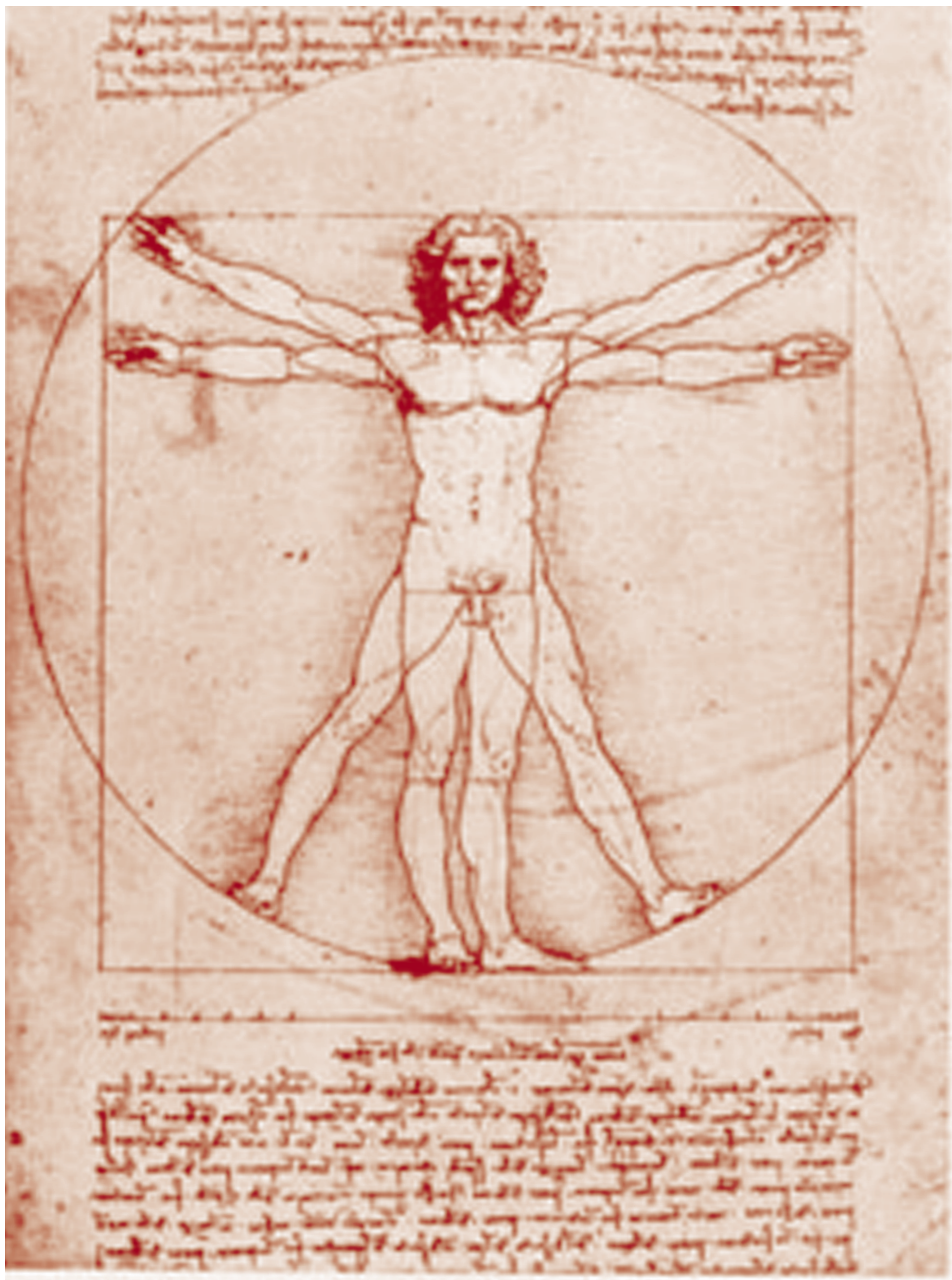
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εγγεγραμμένα Σχήματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα μελετήσουμε αρχικά την έννοια της εγγεγραμμένης γωνίας και τη σχέση της με την αντίστοιχη επίκεντρη καθώς και με τη γωνία χορδής και εφαπτομένης. Έτσι, θα μας δοθεί η δυνατότητα αναλυτικής μελέτης βασικών γεωμετρικών τόπων στον κύκλο.

Τέλος, θα μελετήσουμε τα εγγεγραμμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα καθώς και συγκεκριμένες γεωμετρικές κατασκευές που γίνονται με τη βοήθεια γεωμετρικών τόπων.



Σχέδιο και σημειώσεις του Ιταλού ζωγράφου της Αναγέννησης Leonardo da Vinci (1452-1519), από το Architectura de Vitruve, περίπου 1492.

Εγγεγραμμένη γωνία

6.1 Εισαγωγικά - Ορισμοί

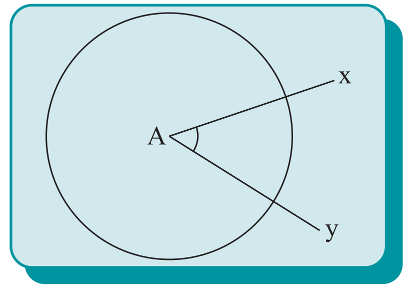
Δίνεται μία κυρτή γωνία $x\hat{A}y$ και ένας κύκλος (O,R). Οι σχετικές θέσεις τους καθορίζονται από τη θέση της κορυφής της και των πλευρών της:

(i) Αν η κορυφή είναι το κέντρο του κύκλου (σχ.1), τότε η γωνία λέγεται επίκεντρη, όπως είδαμε στη § 2.18.

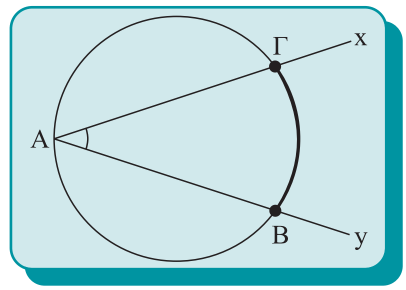
(ii) Αν η κορυφή (σχ.2) είναι σημείο του κύκλου και οι πλευρές της τέμνουσες του κύκλου, τότε η γωνία λέγεται ***εγγεγραμμένη*** γωνία του κύκλου.

Το τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$ που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται ***αντίστοιχο τόξο*** της ή διαφορετικά λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\hat{A}$ ***βαίνει*** στο τόξο $\overset{\frown}{B\Gamma}$.

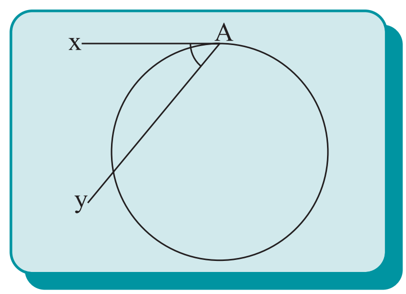
(iii) Αν η κορυφή είναι σημείο του κύκλου, η μία της πλευρά είναι τέμνουσα και η άλλη εφαπτομένη του κύκλου (σχ.3), τότε η γωνία λέγεται ***γωνία χορδής και εφαπτομένης.***



Σχήμα 1



Σχήμα 2



Σχήμα 3

6.2 Σχέση εγγεγραμμένης και αντίστοιχης επίκεντρης

Η σχέση μίας εγγεγραμμένης και μίας επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

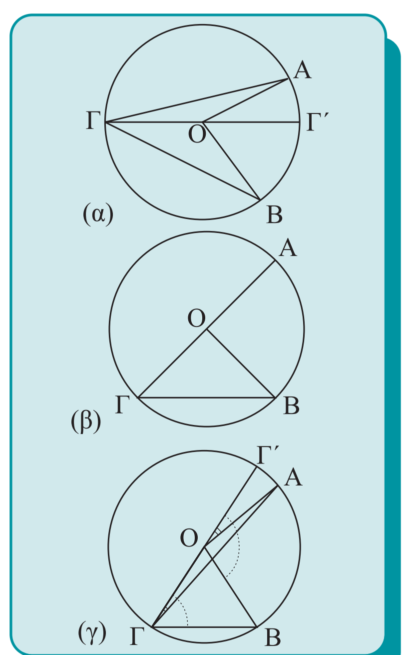
Θεώρημα

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Απόδειξη

Έστω κύκλος (O,R) και ένα τόξο του $\overset{\frown}{AB}$. Ας θεωρήσουμε την αντίστοιχη επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ και σημείο Γ του κύκλου που δεν ανήκει στο τόξο $\overset{\frown}{AB}$. Τότε θα αποδείξουμε ότι $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.

(i) Ας μελετήσουμε πρώτα την περίπτωση όπου το κέντρο O του κύκλου βρίσκεται στο εσωτερικό της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4α). Έστω Γ΄ το αντιδιαμετρικό σημείο του Γ. Το τρίγωνο ΑΟΓ είναι ισοσκελές, επομένως $O\hat{A}\Gamma = O\hat{\Gamma}A$. Η $\Gamma'\hat{O}A$ είναι εξωτερική του τριγώνου ΑΟΓ, επομένως $\Gamma'\hat{O}A = 2O\hat{\Gamma}A$ και όμοια έχουμε ότι $\Gamma'\hat{O}B = 2O\hat{\Gamma}B$.



Σχήμα 4

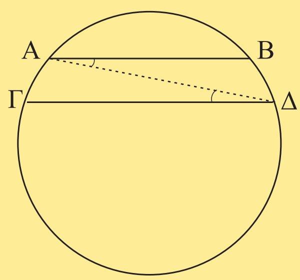
Προσθέτοντας κατά μέλη τις δύο παραπάνω ισότητες έχουμε ότι

$$A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B.$$

(ii) Ας εξετάσουμε κατόπιν την περίπτωση όπου το Ο ανήκει σε μία πλευρά της εγγεγραμμένης γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ (σχ.4β). Η επίκεντρη γωνία $A\hat{O}B$ είναι εξωτερική του ισοσκελούς τριγώνου ΓΟΒ, οπότε $A\hat{O}B = 2A\hat{\Gamma}B$.
(iii) Όμοια με τις προηγούμενες περιπτώσεις (σχ.4γ).

ΣΧΟΛΙΟ

Από το πόρισμα (iii) συμπεραίνουμε εύκολα ότι τα τόξα που περιέχονται μεταξύ παράλληλων χορδών είναι ίσα (σχ.5) και αντίστροφα.



Σχήμα 5

Πορισματα

(i) Το μέτρο μίας εγγεγραμμένης γωνίας ισούται με το μισό του μέτρου του αντίστοιχου τόξου της.

(ii) Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.

(iii) Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο ή σε ίσα τόξα του ίδιου ή ίσων κύκλων είναι ίσες και αντίστροφα.

6.3 Γωνία χορδής και εφαπτομένης

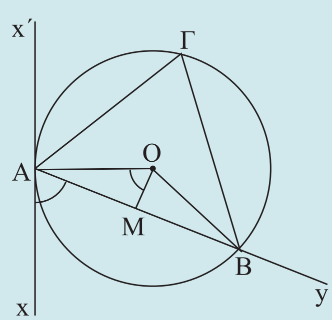
Η σχέση μίας γωνίας χορδής και εφαπτομένης με την εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα

Η γωνία που σχηματίζεται από μία χορδή κύκλου και την εφαπτομένη στο άκρο της χορδής ισούται με την εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής.

Απόδειξη

Έστω ότι η γωνία χορδής και εφαπτομένης $x\hat{A}y$ είναι οξεία (σχ. 6) και $A\hat{\Gamma}B$ μια τυχαία εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει στο τόξο της χορδής ΑΒ. Γνωρίζουμε ότι $A\hat{\Gamma}B = \frac{A\hat{O}B}{2}$.
Φέρουμε το απόστημα ΟΜ, οπότε $A\hat{O}M = M\hat{O}B = \frac{A\hat{O}B}{2} = A\hat{\Gamma}B$. Αλλά $x\hat{A}y = A\hat{O}M$ ως οξείες γωνίες με κάθετες πλευρές. Επομένως $x\hat{A}y = A\hat{\Gamma}B$.
Αν η γωνία χορδής και εφαπτομένης είναι αμβλεία, η απόδειξη είναι ανάλογη.



Σχήμα 6

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Μία γωνία που η κορυφή της ανήκει στο εσωτερικό ή στο εξωτερικό κύκλου και οι πλευρές της είναι τέμνουσες του κύκλου λέγεται *γωνία δύο τεμνουσών* και εκφράζεται ως συνάρτηση των εγγεγραμμένων γωνιών, που σχηματίζουν οι πλευρές της με τον κύκλο.

(i) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$, όπου η κορυφή της Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.7). Οι πλευρές της Αx, Αy και οι προεκτάσεις τους τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,Γ_1 και B_2,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε, ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με το άθροισμα των εγγεγραμμένων γωνιών που βαίνουν στα τόξα που περιέχει η $x\hat{A}y$ και η κατακορυφήν της, δηλαδή:

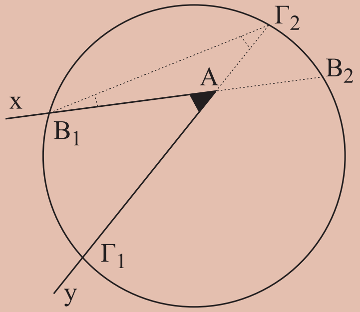
$$x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A.$$

(ii) Ας θεωρήσουμε γωνία $x\hat{A}y$ όπου η κορυφή της Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (σχ.8). Οι πλευρές της Αx, Αy τέμνουν τον κύκλο στα σημεία B_1,B_2 και Γ_1,Γ_2 αντίστοιχα. Τότε ισχύει ότι η γωνία $x\hat{A}y$ ισούται με τη διαφορά των εγγεγραμμένων γωνιών, που βαίνουν στα τόξα του κύκλου που περιέχει η $x\hat{A}y$, δηλαδή

$$x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1, \text{ όπου } B_2\hat{B}_1\Gamma_2 > B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1.$$

Απόδειξη

(i) Η $x\hat{A}y$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως ισούται με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών, δηλαδή $x\hat{A}y = A\hat{B}_1\Gamma_2 + B_1\hat{\Gamma}_2A$.



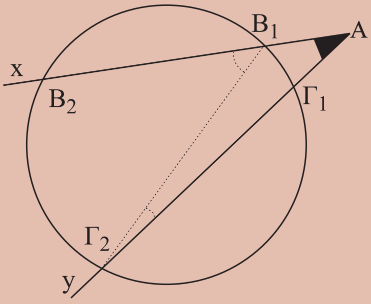
Σχήμα 7

ΣΧΟΛΙΟ

$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2} + \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2}.$$

(ii) Η γωνία $B_2\hat{B}_1\Gamma_2$ είναι εξωτερική του τριγώνου $B_1A\Gamma_2$, επομένως

$B_2\hat{B}_1\Gamma_2 = x\hat{A}y + A\hat{\Gamma}_2B_1$ ή $x\hat{A}y = B_2\hat{B}_1\Gamma_2 - B_1\hat{\Gamma}_2\Gamma_1$.



Σχήμα 8

ΣΧΟΛΙΟ

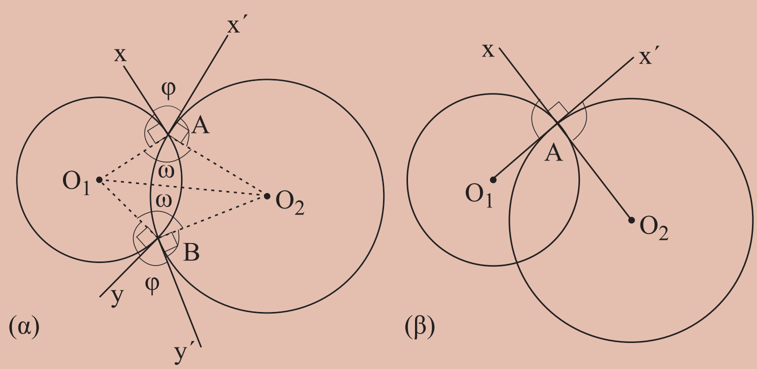
$$x\hat{A}y = \frac{\overset{\frown}{B_2\Gamma_2}}{2} - \frac{\overset{\frown}{B_1\Gamma_1}}{2}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο τεμνόμενους κύκλους και φέρουμε τις εφαπτόμενές τους σε καθένα από τα κοινά σημεία τους.
(i) Να αποδειχθεί ότι οι εφαπτόμενες των δύο κύκλων σε καθένα από τα κοινά σημεία τους σχηματίζουν ίσες γωνίες. Καθεμία από τις γωνίες αυτές λέγεται *γωνία των δύο κύκλων*.
(ii) Αν η γωνία των δύο κύκλων είναι ορθή, λέμε ότι *οι κύκλοι τέμνονται ορθογώνια* ή ότι είναι *ορθογώνιοι*. Να αποδειχθεί ότι, αν οι δύο κύκλοι είναι ορθογώνιοι, οι εφαπτόμενες του ενός κύκλου στα κοινά σημεία τους διέρχονται από το κέντρο του άλλου κύκλου.

Απόδειξη

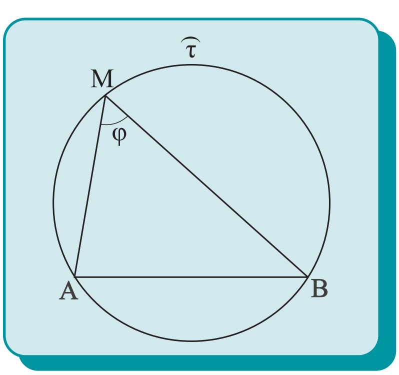
(i) Ας θεωρήσουμε δύο τεμνόμενους κύκλους με κέντρα O_1 και O_2 και A,B τα σημεία τομής τους. Από την ισότητα των τριγώνων O_1AO_2 και O_1BO_2 θα έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 = O_1\hat{B}O_2 = \omega$ (σχ.9α). Ας φέρουμε τώρα τις εφαπτόμενες των δύο κύκλων στο σημείο A και στο σημείο B. Οι εφαπτόμενες στο A σχηματίζουν γωνία $x'\hat{A}x = 2\llcorner - \omega$ (γιατί $O_1\hat{A}x = O_2\hat{A}x' = 1\llcorner$) και όμοια οι εφαπτόμενες στο B σχηματίζουν γωνία $y'\hat{B}y = 2\llcorner - \omega$. Επομένως, $x'\hat{A}x = y'\hat{B}y$.



Σχήμα 9

(ii) Αν δύο κύκλοι τέμνονται ορθογώνια, δηλαδή αν $\varphi = 1\llcorner$ (σχ.9β), έχουμε ότι $O_1\hat{A}O_2 + O_1\hat{A}x = 2\llcorner$, οπότε οι ημιευθείες Ax και AO_2 είναι αντικείμενες.

6.4 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι στον κύκλο Τόξο κύκλου που δέχεται γνωστή γωνία



Σχήμα 10

Έστω ένα ευθύγραμμο τμήμα AB και ένα σημείο M που δεν ανήκει στην ευθεία AB (σχ.10). Αν φ είναι η γωνία $A\hat{M}B$ τότε λέμε ότι το σημείο M ***βλέπει το τμήμα AB*** υπό γωνία φ ή ισοδύναμα το AB ***φαίνεται*** από το σημείο M υπό γωνία φ. Αν $\widehat{\tau}$ είναι ένα τόξο κύκλου που έχει χορδή την AB και διέρχεται από το M, τότε λέμε ότι το τόξο $\widehat{\tau}$ ***δέχεται γωνία φ***.
Θα δούμε τώρα πως κατασκευάζεται ένα τόξο που να δέχεται γωνία φ.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ

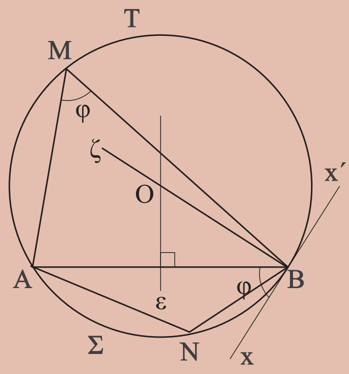
Δίνεται ένα τμήμα ΑΒ και μία γωνία φ. Να κατασκευασθεί τόξο κύκλου που να έχει χορδή το ΑΒ και να δέχεται γωνία φ.

• Έστω φ< 1∟

Ανάλυση

Αν το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ φαίνεται από ένα σημείο Μ υπό γωνία φ, δηλαδή $\hat{AMB}$ = φ, τότε αρκεί να προσδιορίσουμε το κέντρο και την ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου ΑΜΒ (βλ. Πόρισμα (iii), § 6.2).

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ ένα τόξο κύκλου, κέντρου Ο, με χορδή την ΑΒ τέτοιο, ώστε για κάθε σημείο του Μ διαφορετικό των Α,Β να ισχύει $\hat{AMB}$ = φ (σχ.11). Αν φέρουμε την ημιευθεία Βx εφαπτόμενη του κύκλου στο Β θα έχουμε $A\hat{B}x$ = $\hat{AMB}$ = φ (γωνία χορδής και εφαπτομένης) και επομένως η Βx είναι μία σταθερή, ανεξάρτητη του Μ, ημιευθεία. Επειδή ΟΒ⊥Βx, το κέντρο Ο θα βρίσκεται στη σταθερή ευθεία ζ που είναι κάθετη στη Βx στο Β. Αλλά το Ο βρίσκεται επίσης και στη μεσοκάθετο ε του ΑΒ, άρα είναι η τομή των ε και ζ.



Σχήμα 11

Σύνθεση

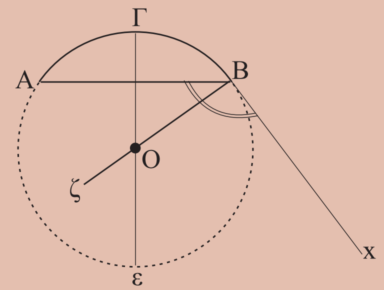
Θεωρούμε το δοσμένο τμήμα ΑΒ και φέρουμε ημιευθεία Βx έτσι, ώστε $A\hat{B}x$ = φ. Στη συνέχεια φέρουμε ευθεία ζ κάθετη της Βx στο Β, που τέμνει τη μεσοκάθετο ε του ΑΒ στο Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Ο,ΟΑ) και το τόξο $\overset{\frown}{ATB}$ (σχ.11) (χωρίς τα άκρα του) είναι το ζητούμενο.

Απόδειξη

Για κάθε σημείο Μ του τόξου $\overset{\frown}{ATB}$ έχουμε $\hat{AMB}$ = $A\hat{B}x$ = φ, αφού η $A\hat{B}x$ είναι γωνία χορδής και εφαπτομένης και η $\hat{AMB}$ εγγεγραμμένη που βαίνει στο τόξο της χορδής, ενώ για κάθε σημείο Ν του τόξου $\overset{\frown}{A\Sigma B}$ έχουμε

$$\hat{ANB} = A\hat{B}x' = 2∟ - A\hat{B}x = 2∟ - φ,$$

όπου Βx΄ η αντικείμενη ημιευθεία της Βx.



Σχήμα 12

Διερεύνηση

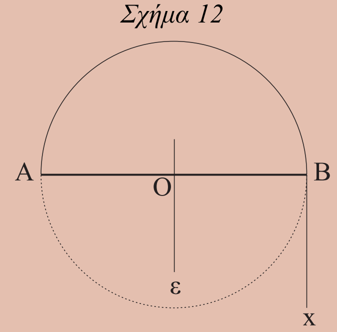
Για να υπάρχει λύση πρέπει η ευθεία ζ να τέμνει την ε, το οποίο συμβαίνει πάντοτε, αφού $A\hat{B}x$ = φ ≠ 0.

• Έστω φ>1∟

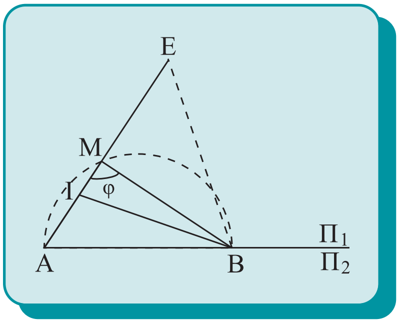
Τότε με τον ίδιο, όπως παραπάνω, τρόπο κατασκευάζουμε τον κύκλο κέντρου Ο και το τόξο $\overset{\frown}{A\Gamma B}$ (σχ.12) που είναι το ζητούμενο (χωρίς τα άκρα του).

• Έστω φ = 1∟

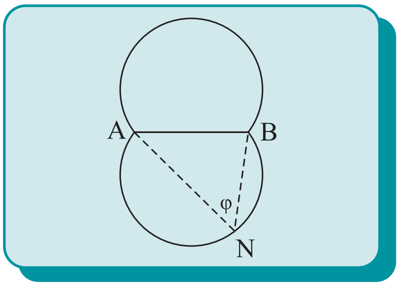
Τότε το σημείο τομής των ευθειών ε, ζ είναι το μέσο Ο του ΑΒ (σχ.13). Επομένως, το ζητούμενο τόξο είναι καθένα από τα ημικύκλια διαμέτρου ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α και Β.



Σχήμα 13



Σχήμα 14



Σχήμα 15

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Έστω τόξο $\overset{\frown}{AB}$ που δέχεται γωνία φ και $Π_1$ το ημιεπίπεδο στο οποίο περιέχεται (σχ.14). Για κάθε σημείο Μ του $\overset{\frown}{AB}$ έχουμε $A\hat{M}B = φ$, ενώ για κάθε σημείο Ι του τμήματος ΑΜ ή σημείο Ε της προέκτασης του ΑΜ έχουμε αντίστοιχα $A\hat{I}B > φ$ και $A\hat{E}B < φ$.

Άρα τα μοναδικά σημεία του $Π_1$ από τα οποία το ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι τα σημεία του $\overset{\frown}{AB}$ εκτός από τα άκρα του. Όμοια αποδεικνύεται ότι τα μοναδικά σημεία του $Π_2$ που βλέπουν το ΑΒ υπό γωνία φ είναι τα σημεία του τόξου $\overset{\frown}{ANB}$ συμμετρικού του $\overset{\frown}{AB}$ ως προς την ευθεία ΑΒ (σχ.15).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό γωνία φ είναι δύο τόξα κύκλων, χορδής ΑΒ, χωρίς τα άκρα τους Α,Β, συμμετρικά ως προς την ευθεία ΑΒ, καθένα από τα οποία δέχεται γωνία φ.

Άμεση συνέπεια του προηγουμένου είναι ότι:

Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου από τα οποία ένα τμήμα ΑΒ φαίνεται υπό ορθή γωνία είναι κύκλος με διάμετρο ΑΒ, χωρίς τα σημεία Α και Β.

ΣΧΟΛΙΟ

*Στη λύση του παραπάνω προβλήματος, εκτός από τα γνωστά μας βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση αναφέραμε πριν από αυτά και το βήμα της **ανάλυσης**. Το βήμα αυτό το κάνουμε όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή και περιλαμβάνει τα εξής: Υποθέτουμε ότι κατασκευάσαμε το ζητούμενο σχήμα και προσπαθούμε να εντοπίσουμε εκείνες τις ιδιότητές του που ανάγουν την κατασκευή του σε γεωμετρικές κατασκευές που μας είναι ήδη γνωστές. Στη σύνθεση ή αλλιώς κατασκευή έχοντας οδηγό την ανάλυση κάνουμε όλες εκείνες τις επιμέρους γεωμετρικές κατασκευές που τελικά θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του ζητούμενου σχήματος. Τα παραπάνω βήματα ακολουθούν, όπως είναι γνωστό, το βήμα της απόδειξης και το βήμα της διερεύνησης (§ 3.17).*
*Η μέθοδος αυτή των τεσσάρων βημάτων: ανάλυση, σύνθεση, απόδειξη και διερεύνηση είναι γνωστή ως **αναλυτική - συνθετική** μέθοδος και χρησιμοποιείται σε προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών και σε άλλες περιοχές των Μαθηματικών.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια γωνία λέγεται εγγεγραμμένη;*

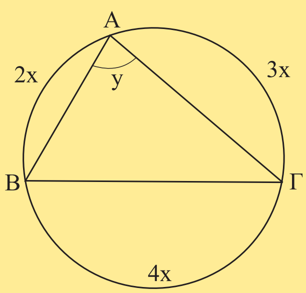
2. *Αν φ και ω είναι αντίστοιχα η εγγεγραμμένη και η επίκεντρη γωνία που βαίνουν στο ίδιο τόξο ενός κύκλου, τότε:*
α. $\varphi = \omega$, β. $\varphi = 2\omega$, γ. $\omega = 2\varphi$, δ. $\varphi = 90° + \omega$,
ε. Τίποτα από τα προηγούμενα.
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

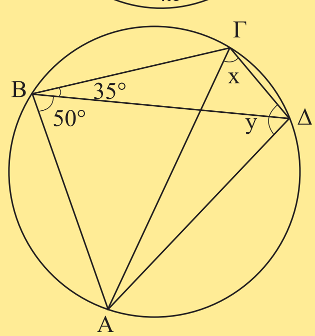
3. *Συμπληρώστε το κενό στην επόμενη πρόταση:*
“Η γωνία χορδής και εφαπτομένης ισούται με ....”

4. *Ποιος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου τα οποία βλέπουν ένα γνωστό τμήμα υπό γωνία $\varphi < 1∟$ ή $\varphi = 1∟$;*

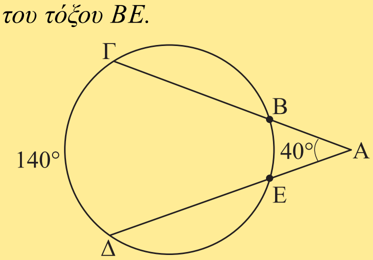
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε καθένα από τα παρακάτω σχήματα να βρείτε τα x και y.*

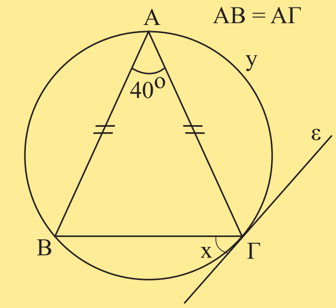


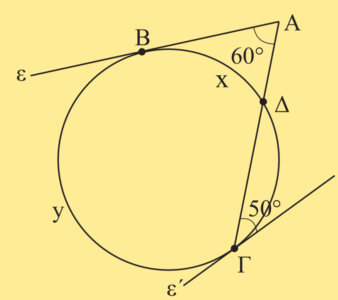


2. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 40°$, να βρείτε το μέτρο του τόξου $\overset{\frown}{BE}$.*

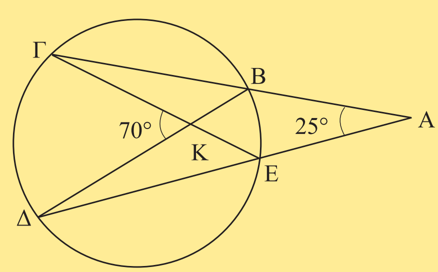


3. *Αν στα παρακάτω σχήματα οι ευθείες ε και ε′ είναι εφαπτόμενες να βρεθούν τα x και y.*

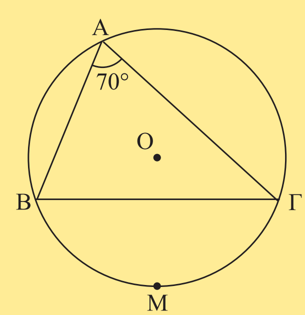




4. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{A} = 25°$, να βρείτε τα μέτρα των τόξων $\overset{\frown}{EB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$.*



5. *Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $\overset{\frown}{BM} = \overset{\frown}{M\Gamma}$ και $\hat{A} = 70°$, να υπολογίσετε τις γωνίες των τριγώνων ΟΒΓ και ΜΒΓ.*

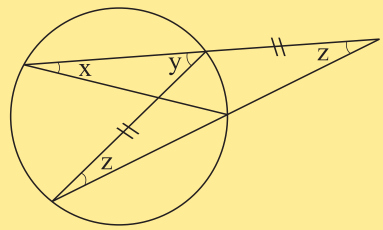


6. *Στο παρακάτω σχήμα, ποια σχέση είναι σωστή;*
i) $x - y + z = 0$,
ii) $x - 2y + z = 0$,
iii) $x - y + z = 0$,

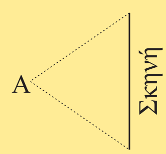
iv) $x + y = 2z$,

v) καμία από τις παραπάνω.

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.



7. *Το καλύτερο κάθισμα σε έναν κινηματογράφο είναι το κάθισμα “Α”. Να βρείτε ποια άλλα καθίσματα έχουν την ίδια οπτική γωνία με το θεατή που κάθεται στο κάθισμα Α .*



Αποδεικτικές Ασκήσεις

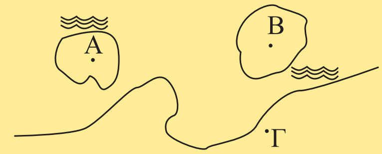
1. *Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη στο μέσο ενός από τα τόξα με χορδή ΑΒ κύκλου (Κ) είναι παράλληλη στη χορδή ΑΒ και αντίστροφα.*

2. *Δύο κύκλοι τέμνονται στα σημεία Α και Β. Αν Γ και Δ είναι τα αντιδιαμετρικά σημεία του Α στους δύο κύκλους, να αποδείξετε ότι η ευθεία ΓΔ διέρχεται από το Β.*

3. *Δύο κάθετες χορδές ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Κ) τέμνονται στο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι η διάμεσος ΡΜ του τριγώνου ΡΒΓ είναι κάθετη στην ΑΔ.*

4. *Ο καπετάνιος ενός ιστιοπλοϊκού πλοίου Ι είδε τρεις σημαδούρες για υφάλους στα σημεία Α, Β, Γ . Με μία πυξίδα διόπτευσης μέτρησε ότι*

$$A\hat{I}B = 100°,\ B\hat{I}\Gamma = 125°,\ \Gamma\hat{I}A = 135°.$$



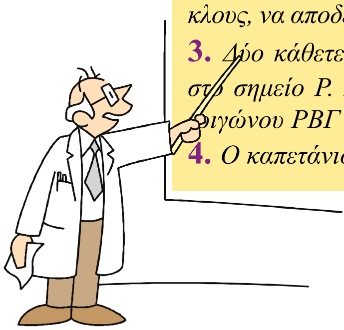
Εντόπισε τα σημεία Α, Β, Γ στο χάρτη και προσδιόρισε την ακριβή θέση του ιστιοπλοϊκού. Πώς τα κατάφερε;

Σύνθετα Θέματα

1. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά (ή εσωτερικά) στο σημείο Α και δύο ευθείες ε, ε' που διέρχονται από το Α τέμνουν τον ένα κύκλο στα σημεία Β, Β΄ και τον άλλο στα Γ και Γ' αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΒΒ'//ΓΓ'.*

2. *Δύο κύκλοι εφάπτονται εσωτερικά στο Α. Μία χορδή ΒΓ του μεγαλύτερου κύκλου εφάπτεται στο μικρότερο, στο σημείο Δ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ διχοτομεί τη γωνία $B\hat{A}\Gamma$.*

3. *Δίνεται κύκλος (Κ), η εφαπτομένη ε σε ένα σημείο του Α και ένα σημείο Ρ της ε. Από το Ρ φέρουμε μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα Β και Γ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$ τέμνει τη χορδή ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι ΡΔ=ΡΑ.*



Εγγεγραμένα και εγγράψιμα τετράπλευρα

6.5 Το εγγεγραμένο τετράπλευρο

Ορισμός

Ένα τετράπλευρο λέγεται *εγγεγραμμένο* σε κύκλο, αν οι κορυφές του είναι σημεία του κύκλου.

Ο κύκλος στον οποίο είναι εγγεγραμμένο ένα τετράπλευρο λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τετραπλεύρου.

Θεώρημα

Ένα τετράπλευρο ΑΒΓΔ που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Οι απέναντι γωνίες του είναι παραπληρωματικές.

(ii) Κάθε πλευρά του φαίνεται από τις απέναντι κορυφές υπό ίσες γωνίες.