

ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ (2003/2004)
 (Απόδειξη διαίρεσης δύο αριθμών με τη μέθοδο της επαγωγής)

Να δειχτεί επαγωγικά ότι ο αριθμός $7^n + 2$ διαιρείται με το 3, $\forall n \in \mathbb{N}$

Υποδειγματική Λύση

Έστω $P(n)$ η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για $n = 1$:

$$7^1 + 2 = 9 \rightarrow \text{το } 9 \text{ διαιρείται με το } 3 \rightarrow P(1) \text{ αληθής}$$

Έστω ότι ισχύει για $n = k$:

Δηλαδή έστω ότι ο αριθμός $7^k + 2$ διαιρείται με το 3 και επομένως \rightarrow

$$7^k + 2 = 3w, \quad w \in \mathbb{Z}$$

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n = k + 1$:

(Δηλαδή ότι ο αριθμός $7^{k+1} + 2$ διαιρείται με το 3)

$$\begin{aligned} 7^{k+1} + 2 &= 7 \cdot 7^k + 2 = \\ &= 7(3w - 2) + 2 = \\ &= 3 \cdot (7w) - 14 + 2 = \\ &= 3 \cdot (7w) - 12 = \\ &= 3 \cdot (7w) - 3 \cdot 4 = 3 \cdot (7w - 4) \end{aligned}$$

Και επειδή $7w - 4 \in \mathbb{Z} \rightarrow$ ο αριθμός $7^{k+1} + 2$ διαιρείται με το 3.

Επομένως $P(k + 1)$ ισχύει.

Άρα $P(n)$ αληθής.