GI_A_GEO_2_5634

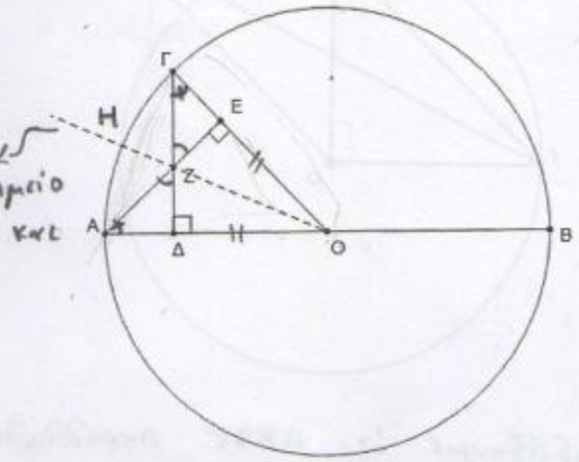
ΘΕΜΑ 2

Έστω κύκλος με κέντρο Ο και ακτίνα ρ. Θεωρούμε διάμετρο ΑΒ και τυχαίο σημείο Γ του κύκλου. Αν ΑΕ κάθετο στην ΟΓ και ΓΔ κάθετο στην ΑΟ να αποδείξετε ότι.

α) Το τρίγωνο $\overset{\triangle}{ΔΟΕ}$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

β) Η ΟΖ διχοτομεί τη γωνία $\hat{ΑΟΓ}$ και προεκτεινόμενη διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ (Μονάδες 12)

Έστω Η σημείο τομής της ΟΖ και του κύκλου



α) ΟΓ = ΟΑ = ρ (1)

$\overset{\triangle}{ΔΟΓ} = \overset{\triangle}{ΑΕΟ}$ διότι $\hat{ΟΔΓ} = \hat{ΑΕΟ}$ και $\hat{ΑΟΓ}$ κοινή. Άρα έχουν 2 γωνίες ίσες μια προς μια, συνεπώς και η τρίτη γωνία θα είναι ίση. Και επειδή έχουν μια πλευρά ίση μια προς μία, τότε είναι και ίσα.

οπότε $\hat{ΟΓΔ} = \hat{ΕΑΟ}$ (2) και ΟΕ = ΟΔ (3) Άρα ΟΔΕ ισοσκελές

β) $\left.\begin{array}{l} \text{Άρα } ΑΔ = ΟΑ - ΑΔ \\ ΕΓ = ΟΓ - ΟΕ \overset{(1)(3)}{=} ΟΑ - ΑΔ \end{array}\right\} \Rightarrow ΑΔ = ΕΓ$ (4)

Επίσης $\hat{ΓΖΕ} = \hat{ΔΖΑ}$ (5) ως κατακορυφήν

οπότε επειδή $\overset{\triangle}{ΑΔΖ}, \overset{\triangle}{ΓΖΕ}$ ορθογώνια και λόγω (2), (4), (5) ισχύει $\overset{\triangle}{ΑΔΖ} = \overset{\triangle}{ΓΖΕ}$ Άρα ΔΖ = ΖΕ, οπότε ΟΖ διχοτόμος της $\hat{ΑΟΓ}$ οπότε τα τόξα που δημιουργούν είναι ίσα.

Οπότε $\hat{ΑΟΗ} = \hat{ΗΟΓ}$

Άρα ΑΗ = ΗΓ. Άρα η ΟΖ διέρχεται από το μέσο του τόξου ΑΓ