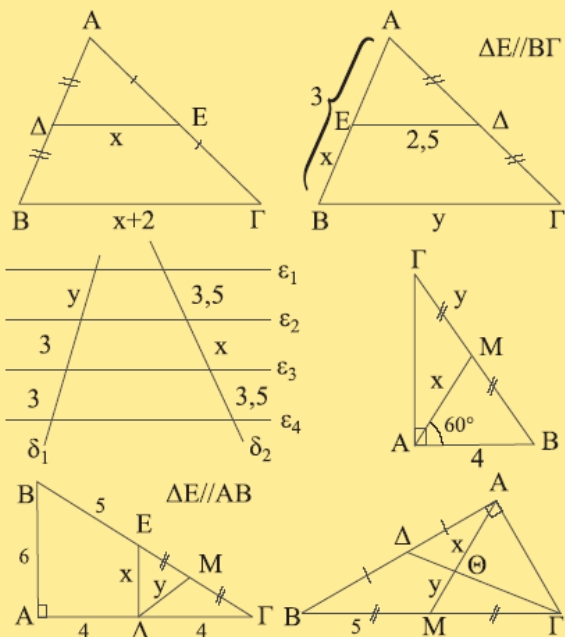


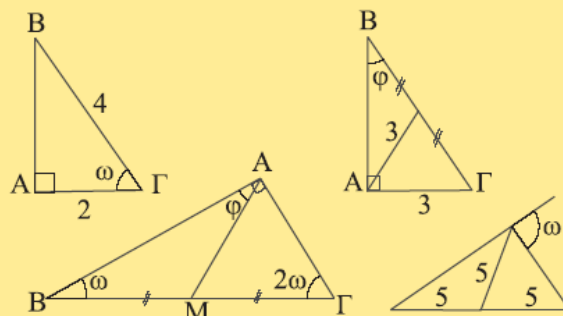
## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα  $x$  και  $y$ .

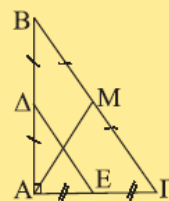


2. Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$ .



3. Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκέντρο και το βαρύκέντρο ταυτίζονται;

4. Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα  $AM = \Delta E$ .



5. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) ο κύκλος διαμέτρου  $B\Gamma$  διέρχεται από το  $A$ ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  τριγώνου  $AB\Gamma$  και  $Z$  τυχαίο σημείο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι η  $\Delta E$  διχοτομεί την  $AZ$ .

2. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και η διάμεσός του  $AD$ . Αν  $E$ ,  $Z$  και  $H$  είναι τα μέσα των  $BA$ ,  $AD$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το  $\Delta EZH$  είναι παραλληλόγραμμο.

3. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  φέρουμε τα ύψη  $BD$  και  $GE$ . Αν  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $MD = ME$ .

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$ . Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AG$ .

5. Αν σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι  $\mu_\beta = \mu_\gamma$ , να αποδείξετε ότι  $\beta = \gamma$ .

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Προεκτείνουμε τη  $GA$  κατά τυχαίο τμήμα  $AD$ . Από το  $\Delta$  φέρουμε  $\Delta H \perp B\Gamma$ , η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ . Να αποδείξετε ότι  $GE \perp AB$ .

7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} = 30^\circ$  και  $\Delta$ ,  $E$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $E\Delta$  κατά τμήμα  $\Delta Z = E\Delta$ . Να αποδείξετε ότι το  $A\Gamma EZ$  είναι ρόμβος.

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AD$ .

i) Αν  $E$ ,  $Z$  είναι τα μέσα των  $AB$  και  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι  $E\Delta Z = \hat{A} = 90^\circ$ .

ii) Αν  $M$  είναι το μέσο της  $EZ$ , να αποδείξετε ότι  $AM = \frac{B\Gamma}{4}$ .

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των  $B\Gamma$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Αν η  $EZ$  τέμνει τη διαγώνιο  $A\Gamma$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι  $GH = \frac{A\Gamma}{4}$ .

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  και το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι  $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

4. Αν  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι  $\Delta E$  και  $BZ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $A\Gamma$ .

5. Αν  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$ ,  $\Gamma\Delta$  παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι  $AE$  και  $AZ$  τριχοτομούν τη διαγώνιο  $B\Delta$ .

6. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$ ,  $\Delta$  είναι το μέσο της διαμέσου  $AM$ .

Αν η  $B\Delta$  τέμνει την πλευρά  $A\Gamma$  στο  $E$ , να αποδείξετε ότι  $AE = \frac{E\Gamma}{2}$ .

7. Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = AB$ . Αν η  $\Delta E$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $H$  και τη  $B\Gamma$  στο  $Z$ , να αποδείξετε ότι

$$i) BZ = Z\Gamma, \quad ii) \Gamma H = \frac{AH}{2}.$$

8. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 30^\circ$  η κάθετος στο μέσο  $M$  της υποτείνουσας  $B\Gamma$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο  $\Delta$ . Να αποδείξετε ότι:

$$i) M\Delta = AD, \quad ii) M\Delta = \frac{AB}{3}.$$

9. Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  και  $E$ ,  $Z$  τα μέσα των  $AB$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $H$ ,  $K$  οι προβολές των κορυφών  $A$  και  $\Gamma$  στη διαγώνιο  $B\Delta$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $E\Gamma \perp KZ$ .

10. Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;

### Σύνθετα θέματα

1. Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $AD$ . Αν  $E$  και  $Z$  τα μέσα των  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι  $\Delta E Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$ .

2. Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) φέρουμε το ύψος του  $AD$ . Να αποδείξετε ότι αν  $\hat{B} = 15^\circ$ , τότε  $AD = \frac{B\Gamma}{4}$  και αντίστροφα. (Υπόδειξη: Φέρουμε τη διάμεσο  $AM$ ).

3. Σε κυρτό τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  θεωρούμε το βαρύκεντρο  $K$  του τριγώνου  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $E$ ,  $Z$  και  $H$  των  $AB$ ,  $\Gamma\Delta$  και  $K\Delta$  αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι  $E\Gamma \parallel KZ$ .

4. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90^\circ$  και το ύψος του  $AD$ . Προεκτείνουμε την  $AB$  κατά τμήμα  $BE = B\Delta$ . Να αποδείξετε ότι η  $\Delta E$  διχοτομεί την πλευρά  $A\Gamma$ .

5. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ , η διχοτόμος του  $AD$  και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Αν  $E$  είναι η προβολή του  $B$  στη διχοτόμο  $AD$ , να αποδείξετε ότι:

$$i) EM \parallel A\Gamma, \\ ii) EM = \frac{A\Gamma - AB}{2},$$

$$iii) \Delta \hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}.$$

6. Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ , το ύψος του  $B\Delta$  και  $M$  το μέσο του τμήματος  $\Gamma\Delta$ . Προεκτείνουμε τη  $\Delta B$  κατά τμήμα  $BE = \Delta B$ . Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το  $M$  στην  $AB$ , η κάθετη από το  $A$  στην  $E\Gamma$  και η  $B\Delta$  συντρέχουν.

7. Αν  $K$  και  $L$  είναι οι προβολές της κορυφής  $A$  τριγώνου  $AB\Gamma$  στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας  $\hat{B}$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) Το  $AKBL$  είναι ορθογώνιο.

ii) Η ευθεία  $KL$  διέρχεται από το μέσο της  $AG$ .

8. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) το ύψος

του  $AD$  και η διάμεσός του  $AM$ . Αν  $E, Z$  οι προβολές του  $\Delta$  στις  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i)  $AD = EZ$ ,

ii)  $AM \perp EZ$ ,

iii) Η διάμεσος  $AM$  το τμήμα  $DZ$  και η παράλληλη προς την  $EZ$  από το  $B$  συντρέχουν.