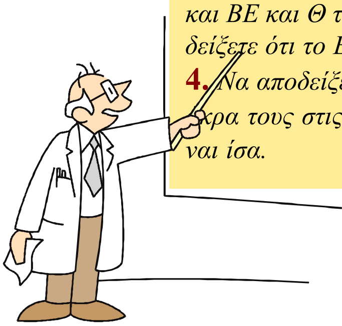
Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΒΖ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΖ = ΔΕ, ii) ΑΖ⊥ΔΕ.

3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*



4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 45°$. Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.*

2. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε ΒΕ⊥ΑΓ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\Delta\hat{B}E$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΒΓ = ΓΖ.*

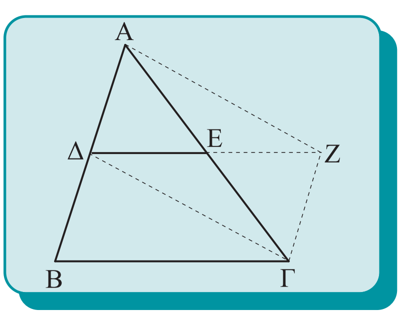
3. *Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).*

Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι ΔΕ // = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα ΕΖ = ΔΕ. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα ΑΔ = // ΓΖ, οπότε ΔΒ = // ΓΖ, αφού ΑΔ = ΔΒ. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) ΔΖ // ΒΓ άρα ΔΕ // ΒΓ και

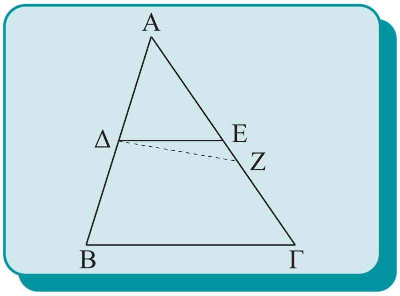
(ii) ΔΖ = ΒΓ ή 2ΔΕ = ΒΓ ή ΔΕ = $\frac{ΒΓ}{2}$.

Θεώρημα ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ας φέρουμε από το μέσο Δ της ΑΒ την παράλληλη προς την ΒΓ που τέμνει την ΑΓ στο Ε (σχ.21). Θα αποδείξουμε ότι το Ε είναι το μέσο της ΑΓ. Έστω ότι το Ε δεν είναι μέσο της ΑΓ. Αν Ζ είναι το μέσο της ΑΓ, το τμήμα ΔΖ ενώνει τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα ΔΖ // ΒΓ. Έτσι, όμως, έχουμε από το Δ δύο παράλληλες προς τη ΒΓ, που είναι άτοπο. Άρα το Ε είναι μέσο της ΑΓ.



Σχήμα 21

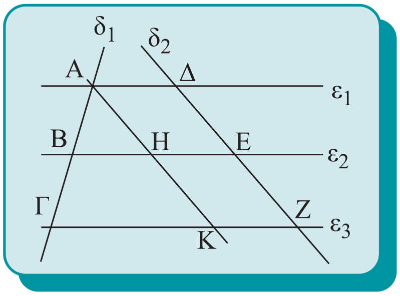
Θεώρημα ΙΙΙ

Αν τρεις (τουλάχιστον) παράλληλες ευθείες ορίζουν σε μία ευθεία ίσα τμήματα, θα ορίζουν ίσα τμήματα και σε κάθε άλλη ευθεία που τις τέμνει.

Απόδειξη

Θεωρούμε τις παράλληλες ευθείες $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ οι οποίες τέμνουν την $δ_1$ στα σημεία Α, Β, Γ και ορίζουν σε αυτή τα ίσα ευθύγραμμα τμήματα ΑΒ, ΒΓ (σχ.22). Αν μια άλλη ευθεία $δ_2$ τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$, $ε_3$ στα σημεία Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, θα αποδείξουμε ότι ΔΕ = ΕΖ.

Φέρουμε ΑΚ // ΔΖ. Τότε τα τετράπλευρα ΑΔΕΗ και ΕΖΚΗ είναι παραλληλόγραμμα, οπότε ΑΗ = ΔΕ (1) και ΗΚ = ΕΖ (2). Στο τρίγωνο ΑΚΓ το Β είναι το μέσο της ΑΓ και ΒΗ // ΓΚ. Άρα το Η είναι μέσο της ΑΚ, δηλαδή ΑΗ = ΗΚ (3). Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΔΕ = ΕΖ.



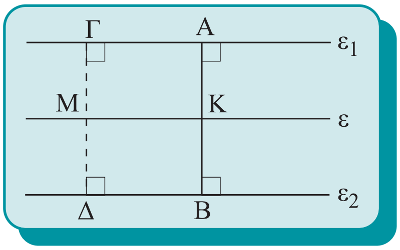
Σχήμα 22

• Η μεσοπαράλληλος δύο παραλλήλων

Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ και ένα τμήμα ΑΒ = υ κάθετο προς αυτές, το οποίο έχει τα άκρα του στις $ε_1$ και $ε_2$. Αν από το μέσο Κ της ΑΒ φέρουμε την ευθεία ε παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$, παρατηρούμε ότι κάθε σημείο Μ της ε **ισαπέχει** από τις $ε_1$ και $ε_2$, αφού $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Αντίστροφα, αν ένα σημείο Μ ισαπέχει από τις $ε_1$ και $ε_2$, το Μ τότε είναι σημείο μεταξύ των παραλλήλων και ισχύει $ΜΓ+ΜΔ = ΓΔ = υ$, οπότε $ΜΓ = ΜΔ = \frac{υ}{2}$.

Έτσι τα τετράπλευρα ΜΓΑΚ και ΜΔΒΚ είναι παραλληλόγραμμα (ΜΓ// = ΑΚ, ΜΔ // = ΚΒ), οπότε ΜΚ // $ε_1$, $ε_2$. Επομένως, το Μ ανήκει στην ευθεία ε.



Σχήμα 23

Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι:
Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από δύο παράλληλες ευθείες $ε_1$ και $ε_2$ είναι μία ευθεία ε παράλληλη προς τις $ε_1$ και $ε_2$, η οποία διέρχεται από τα μέσα των τμημάτων που έχουν τα άκρα τους στις δύο παράλληλες.
Η ευθεία ε λέγεται ***μεσοπαράλληλος*** των $ε_1$ και $ε_2$.

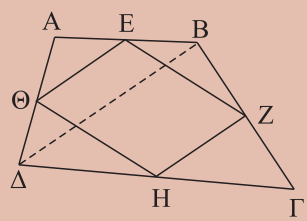
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Να αποδειχθεί ότι τα μέσα των πλευρών ενός τετραπλεύρου είναι κορυφές παραλληλογράμμου.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε, Ζ, Η, Θ των ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ αντίστοιχα. Θα αποδείξουμε ότι το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

Φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ (σχ.24α). Παρατηρούμε ότι τα Ε και Θ είναι τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΔ, οπότε $ΕΘ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (1).

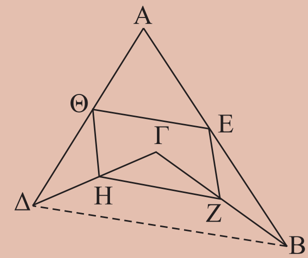


Σχήμα 24α

Όμοια από το τρίγωνο ΒΓΔ προκύπτει ότι $ΖΗ = // \frac{ΒΔ}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) έχουμε ότι ΕΘ = // ΖΗ, οπότε το ΕΖΗΘ είναι παραλληλόγραμμο.

ΣΗΜΕΙΩΣΗ
Ανάλογο συμπέρασμα ισχύει και σε μη κυρτό τετράπλευρο (σχ.24β).



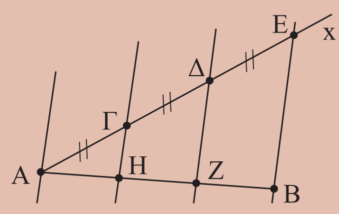
Σχήμα 24β

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Να διαιρεθεί ένα ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ σε τρία ίσα ευθύγραμμα τμήματα (σχ.25).

Λύση

Φέρουμε μια ημιευθεία Αx και παίρνουμε σε αυτή τα ίσα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ΑΓ, ΓΔ, ΔΕ. Φέρουμε τη ΒΕ και από τα Δ, Γ και Α παράλληλες προς αυτή, οι οποίες τέμνουν την ΑΒ στα σημεία Ζ και Η. Τότε σύμφωνα με το θεώρημα ΙΙΙ, σελ. 105, θα είναι ΑΗ = ΗΖ = ΖΒ.



Σχήμα 25

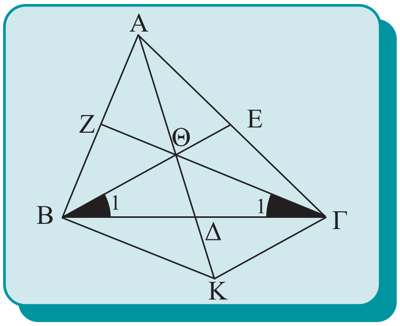
5.7 Βαρύκεντρο τριγώνου

Θεώρημα

Οι διάμεσοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο του οποίου η απόσταση από κάθε κορυφή είναι τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τις δύο διαμέσους ΒΕ και ΓΖ. Επειδή $\hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\llcorner$, οι δύο διάμεσοι τέμνονται σε ένα εσωτερικό σημείο Θ του τριγώνου. Αν η ΑΘ τέμνει τη ΒΓ στο Δ, θα αποδείξουμε ότι i) η ΑΔ είναι η τρίτη διάμεσος του τριγώνου, δηλαδή $B\Delta = \Delta\Gamma$ και ii) $A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta$.



Σχήμα 26

i) Στην ημιευθεία ΘΔ παίρνουμε τμήμα ΘΚ = ΑΘ. Παρατηρούμε ότι τα σημεία Ε και Θ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΑΚΓ, οπότε $E\Theta = // \frac{\Gamma K}{2}$ (1).

Όμοια από το τρίγωνο ΑΒΚ έχουμε $Z\Theta = // \frac{BK}{2}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι ΒΕ //ΓΚ και ΓΖ // ΒΚ, δηλαδή το ΒΘΓΚ είναι παραλληλόγραμμο (3). Άρα οι διαγώνιοί του διχοτομούνται, οπότε $B\Delta = \Delta\Gamma$.

Το σημείο Θ, στο οποίο τέμνονται οι διάμεσοι του ΑΒΓ, λέγεται ***βαρύκεντρο*** (ή ***κέντρο βάρους***) του τριγώνου.

ii) Από το παραλληλόγραμμο ΒΘΓΚ έχουμε ακόμη

$$\Theta\Delta = \Delta K = \frac{\Theta K}{2}, \text{ άρα } \Theta\Delta = \frac{A\Theta}{2} \text{ ή } A\Theta = 2\Theta\Delta.$$

Από τις (1) και (3) προκύπτει ότι

$$E\Theta = \frac{\Gamma K}{2} = \frac{B\Theta}{2} \quad \text{ή} \quad B\Theta = 2\Theta E.$$

Όμοια από τις (2) και (3) έχουμε ΓΘ = 2ΘΖ. Παρατηρούμε, λοιπόν, ότι το βαρύκεντρο έχει την ιδιότητα να χωρίζει κάθε διάμεσο σε δύο τμήματα που το ένα είναι διπλάσιο του άλλου. Επίσης έχουμε ότι $A\Delta = A\Theta + \Theta\Delta = 2\Theta\Delta + \Theta\Delta = 3\Theta\Delta$. Άρα

$$\Theta\Delta = \frac{1}{3}A\Delta, \text{ οπότε } A\Theta = \frac{2}{3}A\Delta.$$

Όμοια προκύπτει ότι $B\Theta = \frac{2}{3}BE$ και $\Gamma\Theta = \frac{2}{3}\Gamma Z$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

*Στην παραπάνω πρόταση θεωρήσαμε το σημείο τομής Θ των δύο διαμέσων ΒΕ και ΓΖ και αποδείξαμε ότι η ΑΘ αν προεκταθεί είναι η τρίτη διάμεσος ΑΔ. Αυτός ο τρόπος αποτελεί μια **βασική μέθοδο** για να αποδεικνύουμε ότι τρεις ευθείες **συντρέχουν** σε κάποιο σημείο.*

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

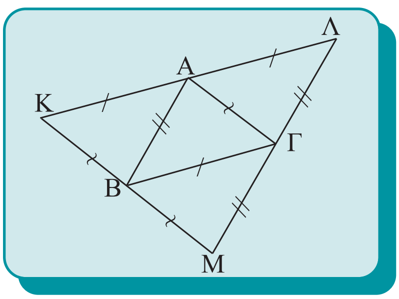
Η απόσταση του βαρυκέντρου Θ ενός τριγώνου ΑΒΓ από κάθε κορυφή του ισούται με τα $\frac{2}{3}$ του μήκους της αντίστοιχης διαμέσου.

5.8 Το ορθόκεντρο τριγώνου

Λήμμα

Οι παράλληλες, που άγονται από τις κορυφές ενός τριγώνου προς τις απέναντι πλευρές του, σχηματίζουν τρίγωνο, το οποίο έχει ως μέσα των πλευρών του τις κορυφές του αρχικού τριγώνου.

Απόδειξη



Σχήμα 27

Από τις κορυφές Α, Β, Γ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές του, οι οποίες ορίζουν ένα νέο τρίγωνο ΚΛΜ (σχ.27).

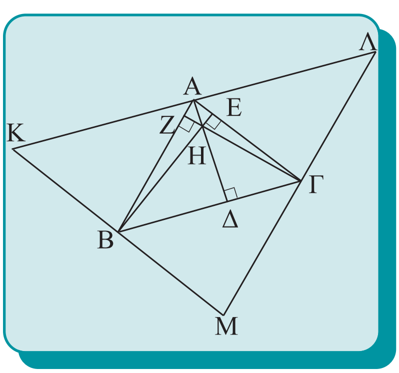
Λόγω των σχηματιζόμενων παραλληλογράμμων ΚΑΓΒ, ΛΑΒΓ και ΜΒΑΓ έχουμε: ΚΑ = ΒΓ = ΑΛ, ΛΓ = ΑΒ = ΓΜ και ΚΒ = ΑΓ = ΒΜ.

Επομένως τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ.

Θεώρημα

Οι φορείς των υψών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο.

Απόδειξη



Σχήμα 28

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και τα ύψη του ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Από τις κορυφές του Α, Β, Γ φέρουμε παράλληλες προς τις απέναντι πλευρές (σχ.28). Σύμφωνα με το Λήμμα, στο τρίγωνο ΚΛΜ τα σημεία Α, Β, Γ είναι τα μέσα των πλευρών του. Επίσης, παρατηρούμε ότι οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι κάθετες στις ΚΛ, ΚΜ και ΜΛ αντίστοιχα (αφού είναι κάθετες στις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ) και μάλιστα είναι κάθετες στα μέσα τους. Δηλαδή οι ευθείες ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ είναι οι μεσοκάθετοι των πλευρών του τριγώνου ΚΛΜ, οπότε θα διέρχονται από το ίδιο σημείο Η.

Το σημείο Η λέγεται ***ορθόκεντρο*** του τριγώνου ΑΒΓ.

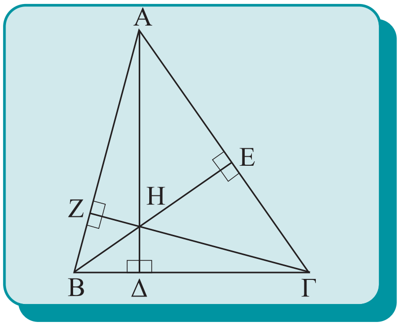
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Όταν το τρίγωνο είναι ορθογώνιο, το ορθόκεντρο είναι η κορυφή της ορθής γωνίας, ενώ σε αμβλυγώνιο τρίγωνο το ορθόκεντρο βρίσκεται εκτός του τριγώνου.

ΠΟΡΙΣΜΑ

Οι κορυφές Α, Β, Γ, τριγώνου ΑΒΓ και το ορθόκεντρό του Η αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε ένα από αυτά τα σημεία είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου, που ορίζεται από τα άλλα τρία σημεία.

Πράγματι οι κορυφές π.χ. Β,Γ και το ορθόκεντρο Η του τριγώνου ΑΒΓ ορίζουν το τρίγωνο ΒΗΓ.
Τα ύψη ΗΔ,ΒΖ και ΓΕ του τριγώνου ΒΗΓ τέμνονται στο Α, οπότε το Α είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου ΒΗΓ.



Σχήμα 29

5.9 Μια ιδιότητα του ορθογώνιου τριγώνου

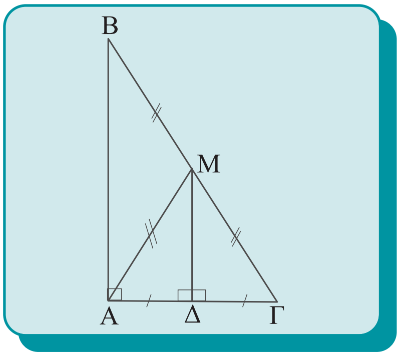
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος οθρογώνιου τριγώνου που φέρουμε από την κορυφή της ορθής γωνίας είναι ίση με το μισό της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.30). Θα αποδείξουμε ότι $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.

Φέρουμε τη διάμεσο ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ. Το ΜΔ συνδέει τα μέσα δύο πλευρών του τριγώνου ΑΒΓ, οπότε ΜΔ // ΑΒ. Αλλά ΑΒ⊥ΑΓ, επομένως και ΜΔ⊥ΑΓ. Άρα, το ΜΔ είναι ύψος και διάμεσος στο τρίγωνο ΑΜΓ, οπότε ΑΜ = ΜΓ, δηλαδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$.



Σχήμα 30

Το παραπάνω θεώρημα ισχύει και αντίστροφα, δηλαδή:

Θεώρημα ΙΙ

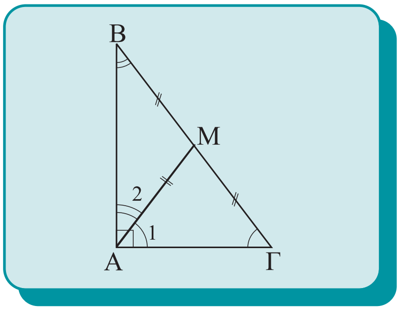
Αν η διάμεσος ενός τριγώνου ισούται με το μισό της πλευράς στην οποία αντιστοιχεί, τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με υποτείνουσα την πλευρά αυτή.

Απόδειξη

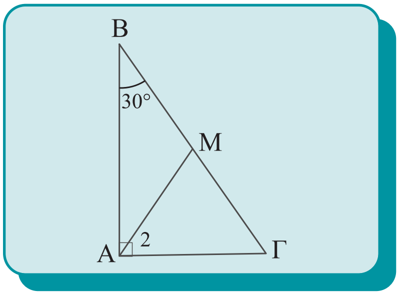
Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διάμεσό του ΑΜ (σχ.31). Αν $AM = \frac{B\Gamma}{2}$, θα αποδείξουμε ότι η γωνία $\hat{A}$ είναι ορθή.

Επειδή $AM = \frac{B\Gamma}{2}$ έχουμε ΑΜ = ΜΓ, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (1) και ΑΜ = ΜΒ, οπότε $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (2).

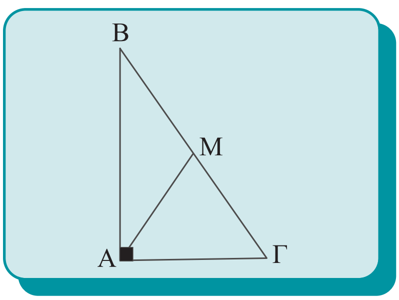
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{B} + \hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{A} = \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner$, οπότε $2\hat{A} = 2\llcorner$ ή $\hat{A} = 1\llcorner$.



Σχήμα 31



Σχήμα 32



Σχήμα 33

Πορισμα

Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του ισούται με 30^o, τότε η απέναντι πλευρά του είναι το μισό της υποτείνουσας και αντίστροφα.

Απόδειξη

Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ (σχ.32).

Θα αποδείξουμε ότι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Επειδή $\hat{B} = 30°$, είναι $\hat{Γ} = 90° – 30° = 60°$. Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ και είναι $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ$. Έτσι $\hat{A}_2 = Γ = 60°$, οπότε το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο. Επομένως $ΑΓ = ΜΓ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Αντίστροφο, αν στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ είναι $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$ (σχ.33), θα αποδείξουμε ότι $\hat{B} = 30°$.

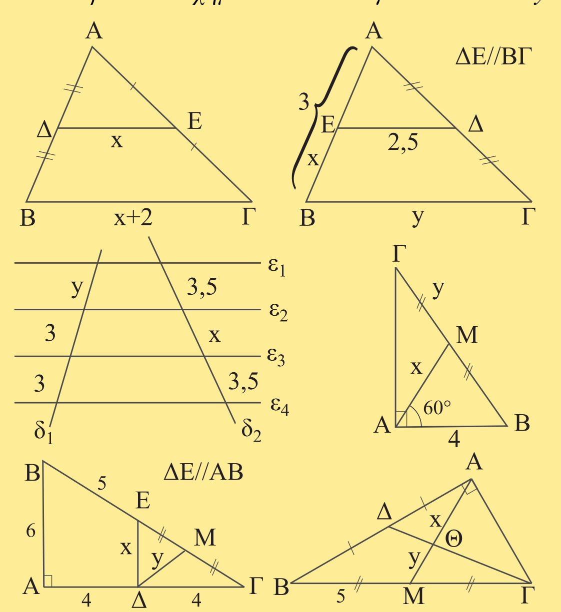
Απόδειξη

Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ, οπότε $ΑΜ = \frac{ΒΓ}{2} = ΜΓ = ΑΓ$ (αφού $ΑΓ = \frac{ΒΓ}{2}$). Άρα το τρίγωνο ΑΜΓ είναι ισόπλευρο, οπότε $\hat{Γ} = 60°$. Επομένως $\hat{B} = 90° – 60° = 30°$.

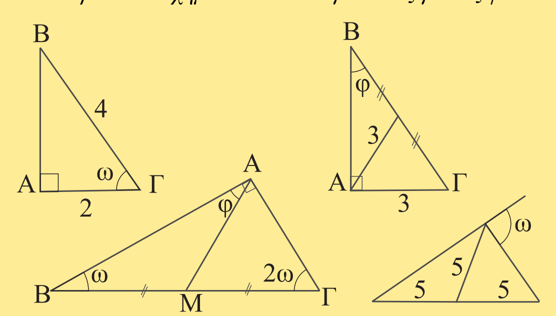
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τα x και y.*

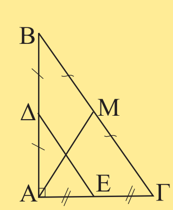


2. *Στα παρακάτω σχήματα να υπολογίσετε τις γωνίες φ και ω.*



3. *Υπάρχει τρίγωνο στο οποίο το ορθόκεντρο και το βαρύκεντρο ταυτίζονται;*

4. *Στο παρακάτω σχήμα να δικαιολογήσετε την ισότητα ΑΜ = ΔΕ.*



5. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) ο κύκλος διαμέτρου ΒΓ διέρχεται από το Α;*

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ τριγώνου ΑΒΓ και Ζ τυχαίο σημείο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την ΑΖ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΔ. Αν Ε, Ζ και Η είναι τα μέσα των ΒΔ, ΑΔ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τα ύψη ΒΔ και ΓΕ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι ΜΔ = ΜΕ.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι ΕΖ=ΑΓ.*

5. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\mu_\beta = \mu_\gamma$, να αποδείξετε ότι $\beta = \gamma$.*

6. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$). Προεκτείνουμε τη ΓΑ κατά τυχαίο τμήμα ΑΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΗ⊥ΒΓ, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΓΕ⊥ΔΒ.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} = 30°$ και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την ΕΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΕΔ. Να αποδείξετε ότι το ΑΓΕΖ είναι ρόμβος.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ.*

i) Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = \hat{A} = 90°$.

ii) Αν Μ είναι το μέσο της ΕΖ, να αποδείξετε ότι $\Delta M = \frac{B\Gamma}{4}$.

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα μέσα Ε και Ζ των ΒΓ και ΓΔ αντίστοιχα. Αν η ΕΖ τέμνει τη διαγώνιο ΑΓ στο Η, να αποδείξετε ότι $\Gamma H = \frac{A\Gamma}{4}$.*

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε τη διάμεσό του ΑΜ και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $M\hat{A}\Delta = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

4. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΑΒ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΔΕ και ΒΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΑΓ.*

5. *Αν Ε, Ζ τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΓΔ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι οι ΑΕ και ΑΖ τριχοτομούν τη διαγώνιο ΒΔ.*

6. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, Δ είναι το μέσο της διαμέσου ΑΜ. Αν η ΒΔ τέμνει την πλευρά ΑΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι $AE = \frac{E\Gamma}{2}$.*

7. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΑΒ. Αν η ΔΕ τέμνει την ΑΓ στο Η και τη ΒΓ στο Ζ, να αποδείξετε ότι*

i) ΒΖ = ΖΓ, ii) $\Gamma H = \frac{AH}{2}$.

8. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 30°$ η κάθετος στο μέσο Μ της υποτείνουσας ΒΓ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι:*

i) ΜΔ = ΑΔ, ii) $M\Delta = \frac{AB}{3}$.

9. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ και Ε, Ζ τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η, Κ οι προβολές των κορυφών Α και Γ στη διαγώνιο ΒΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΕΗ⊥ΚΖ.*

10. *Τρία χωριά που δε βρίσκονται στην ίδια ευθεία ανήκουν στον ίδιο δήμο. Ο δήμος αποφασίζει να κατασκευάσει δρόμο (ευθεία), ο οποίος να ισαπέχει από τα τρία χωριά. Πώς θα γίνει η χάραξη του δρόμου; Πόσοι τέτοιοι δρόμοι υπάρχουν;*

Σύνθετα θέματα

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Αν Ε και Ζ τα μέσα των ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{E}Z = \hat{B} - \hat{\Gamma}$.*

2. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) φέρουμε το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι αν $\hat{B} = 15°$, τότε $A\Delta = \frac{B\Gamma}{4}$ και αντίστροφα. (**Υπόδειξη**: Φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ).*

3. *Σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ θεωρούμε το βαρύκεντρο Κ του τριγώνου ΑΒΓ και τα μέσα Ε, Ζ και Η των ΑΒ, ΓΔ και ΚΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΕΗ//ΚΖ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = 2\hat{\Gamma} < 90°$ και το ύψος του ΑΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΔ. Να αποδείξετε ότι η ΔΕ διχοτομεί την πλευρά ΑΓ.*

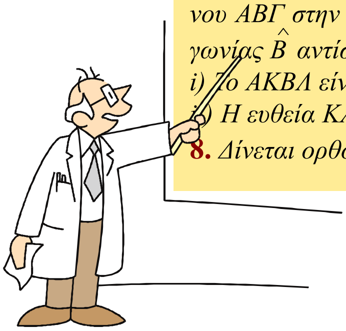
5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ, η διχοτόμος του ΑΔ και Μ το μέσο της ΒΓ. Αν Ε είναι η προβολή του Β στη διχοτόμο ΑΔ, να αποδείξετε ότι:*

i) ΕΜ//ΑΓ,

ii) $EM = \frac{A\Gamma - AB}{2}$,

iii) $\Delta\hat{E}M = \frac{\hat{A}}{2}$.

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, το ύψος του ΒΔ και Μ το μέσο του τμήματος ΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΒ κατά τμήμα ΒΕ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι η κάθετη από το Μ στην ΑΒ, η κάθετη από το Α στην ΕΓ και η ΒΔ συντρέχουν.*



7. *Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.
ii) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

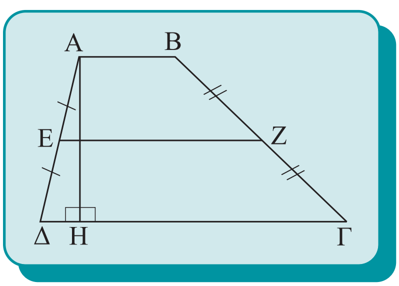
8. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΔ = ΕΖ,
ii) ΑΜ⊥ΕΖ,
iii) Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται ***βάσεις*** του τραπεζίου.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου.

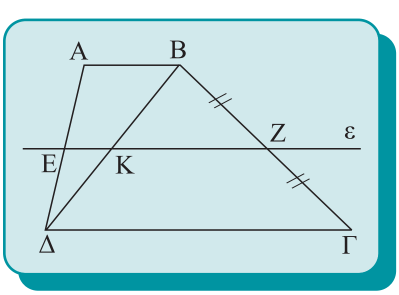
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $EZ = \dfrac{AB + \Gamma\Delta}{2}$.

Απόδειξη



Σχήμα 35

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:
Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $EK = \dfrac{AB}{2}$ (1).
Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $KZ = \dfrac{\Gamma\Delta}{2}$ (2).
Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και
i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).