

5. Πιθανότητες



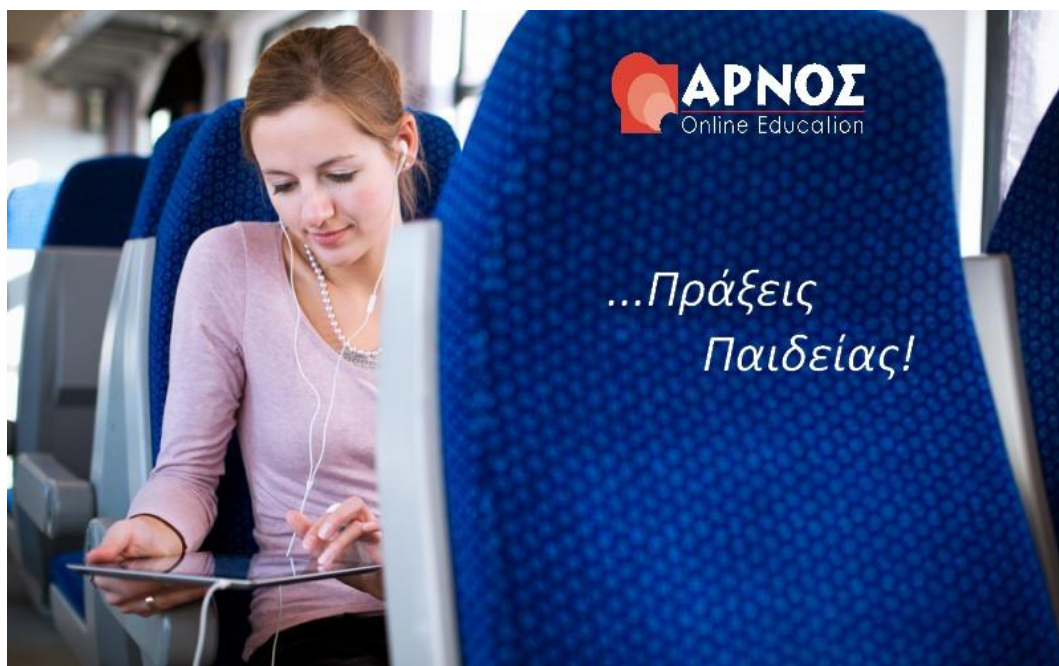
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου

5.3 Η έννοια της πιθανότητας

σχ. βιβλίο (σ.σ. 177-179)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Γ' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 177-179)

5.3 Η Έννοια της πιθανότητας

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

Σε ποια από τα παρακάτω πειράματα τα δυνατά αποτελέσματα είναι ισοπίθανα ;

- α) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες , 4 κόκκινες , 4 πράσινες και 4 άσπρες επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της .
- β) Από ένα κουτί που περιέχει 12 όμοιες μπάλες , 5 κόκκινες , 5 πράσινες και 2 άσπρες επιλέγουμε μία και σημειώνουμε το χρώμα της
- γ) Από την λέξη «χαρά» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι
- δ) Από την λέξη «χώρα» επιλέγουμε ένα γράμμα και σημειώνουμε ποιο είναι

Απάντηση

Στα πειράματα α, γ τα ενδεχόμενα είναι ισοπίθανα. Στο α αφού μπάλες είναι όμοιες

το κάθε χρώμα έχει πιθανότητα να εμφανισθεί $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$. Στο γ ο δειγματικός χώρος

είναι $\Omega = \{\chi, \alpha, \rho\}$ και κάθε γράμμα έχει πιθανότητα να εμφανισθεί. Στα β, γ τα στοιχειώδη ενδεχόμενα έχουν διαφορετική πιθανότητα να εμφανισθούν.

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!



...Πράξεις Παιδείας!

Ερώτηση 2

Αν επιλέξουμε τυχαία ένα γράμμα της αλφαβήτου τότε η πιθανότητα να είναι

φωνήεν είναι : α) $\frac{1}{2}$ β) $\frac{1}{24}$ γ) $\frac{7}{24}$ δ) $\frac{17}{24}$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Απάντηση

Ο αριθμός των φωνηέντων είναι 7, οπότε το ενδεχόμενο Φ έχει $N(\Phi) = 7$. όμως όλα

τα γράμματα της αλφαβήτας είναι $N(\Omega) = 24$. Οπότε $P(\Phi) = \frac{7}{24}$.

Ερώτηση 3

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες.

- α) Η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α μπορεί να είναι $P(A) = 1,02$
- β) Αν η πιθανότητα ενός ενδεχομένου Α είναι 80%, τότε γράφουμε $P(A) = 80$
- γ) Το βέβαιο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 1 και το αδύνατο ενδεχόμενο έχει πιθανότητα 0
- δ) Αν η πιθανότητα να βρέξει είναι 32%, τότε η πιθανότητα να μην βρέξει είναι 68%

Απάντηση

- α) Είναι **λάθος** (Λ), διότι η πιθανότητα ενός ενδεχομένου είναι το πολύ 1.
- β) Είναι **λάθος** (Λ). Η πιθανότητα είναι $P(A) = 0,8$
- γ) Είναι **σωστό** (Σ). Είναι ορισμός.
- δ) Είναι **σωστό** (Σ), διότι τα ενδεχόμενα είναι αντίθετα και έχουν άθροισμα 1.

Ερώτηση 4

Αν η πιθανότητα να πραγματοποιηθεί ένα ενδεχόμενο A είναι $\frac{3}{5}$, τότε η

πιθανότητα να μην πραγματοποιηθεί το A είναι

- α) $\frac{5}{3}$ β) $\frac{1}{5}$ γ) $\frac{2}{5}$ δ) $\frac{4}{5}$

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση

Απάντηση

Η σωστή απάντηση είναι η γ διότι:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5}.$$

Ερώτηση 5

Για δύο ενδεχόμενα A και B ισχύουν $P(A) = \frac{4}{11}$, $P(B) = \frac{5}{11}$ και $P(A \cap B) = \frac{1}{11}$. Ένας

μαθητής υπολόγισε ότι $P(A \cup B) = \frac{6}{11}$ είναι σωστή η απάντηση του ;

Να αιτιολογήσετε τον ισχυρισμό σας .

Απάντηση

Από τον ορισμό ισχύει ότι:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cup B) = \frac{4}{11} + \frac{5}{11} - \frac{1}{11} = \frac{8}{11}$$

Άρα ο υπολογισμός του μαθητή είναι λανθασμένος.

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!



...Πράξεις Παιδείας!

Ασκήσεις**Άσκηση 1**

Επιλέγουμε στην τύχη έναν ακέραιο αριθμό από το 1 έως και το 13. Ποια είναι η πιθανότητα να είναι : **α)** άρτιος **β)** πολλαπλάσιο του 4

Λύση

α) Θεωρούμε Ω δειγματικό χώρο και A το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι άρτιος.

Άρα $N(\Omega) = 13$, $N(A) = 6$.

$$\text{Οπότε } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{6}{13}$$

β) Έστω B το ενδεχόμενο ο αριθμός να είναι πολλαπλάσιο του 4.

Αυτοί οι αριθμοί είναι οι 4 , 8 , 12 , οπότε:

$$N(B) = 3, \text{ τότε } P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{3}{13}$$

Άσκηση 2

Σε μια κλήρωση υπάρχουν 1200 λαχνοί από τους οποίους κερδίζει ο ένας.

Πόσο % πιθανότητα να κερδίσει έχει κάποιος που αγόρασε 6 λαχνούς ;

Λύση

Έστω Ω ο δειγματικός χώρος και A το ενδεχόμενο να κερδίσει ο κάτοχος των 6 λαχνών. Έχουμε τα ενδεχόμενα:

$$N(\Omega) = 1200, N(A) = 6$$

$$\text{Οπότε } P(A) = \frac{6}{1200} = 0,005 = 0,5\%$$

Άσκηση 3

Σε μία τράπουλα 52 φύλλων υπάρχουν 12 φιγούρες . Αν επιλέξουμε στην τύχη ένα φύλλο, ποια είναι η πιθανότητα να μην είναι φιγούρα ;

Λύση

Θεωρούμε Ω τον δειγματικό χώρο και Φ το ενδεχόμενο το φύλλο να είναι φιγούρα. Οπότε τα ενδεχόμενα είναι:

$$N(\Omega) = 52, \quad N(\Phi) = 12$$

$$\text{Άρα } P(\Phi) = \frac{N(\Phi)}{N(\Omega)} = \frac{12}{52} = \frac{3}{13}$$

Το ενδεχόμενο το φύλλο να μην είναι φιγούρα είναι $N(\Phi')$ και το ενδεχόμενό του $P(\Phi')$.

$$\text{Οπότε } P(\Phi') = 1 - P(\Phi) = 1 - \frac{3}{13} = \frac{10}{13}$$

Άσκηση 4

Σε ένα κουτί υπάρχουν 20 όμοιες μπάλες από τις οποίες οι 8 είναι γαλάζιες , οι 7 είναι κίτρινες και οι 5 είναι άσπρες . Βγάζουμε στην τύχη μία μπάλα . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

A: Η μπάλα είναι κίτρινη

B: Η μπάλα να μην είναι άσπρη

Γ: Η μπάλα να είναι γαλάζια ή άσπρη

Λύση

Θεωρούμε Ω το δειγματικό χώρο, Γ τη περίπτωση η μπάλα να είναι γαλάζια, Κ τη περίπτωση να είναι κίτρινες και Α τη περίπτωση να είναι άσπρη. Οπότε:

$$N(\Omega) = 20, \quad N(A) = 7, \quad N(B) = 15, \quad N(\Gamma) = 13$$

$$\text{Οπότε } A) \quad P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{7}{20}$$

$$B) \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{15}{20} = \frac{3}{4}$$

$$\Gamma) \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{13}{20}$$

Άσκηση 5

Στον διπλανό πίνακα φαίνεται η βαθμολογία των 25 μαθητών ενός τμήματος στα Μαθηματικά .

Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή , να βρείτε την πιθανότητα να έχει βαθμό

- α) 15
- β) Μικρότερο του 14
- γ) Μεγαλύτερο ή ίσο του 16
- δ) 19 ή 20

Βαθμός	Μαθητές
9	1
10	2
12	3
13	2
14	4
15	3
16	2
17	2
18	3
19	2
20	1

Λύση

Θεωρούμε A το ενδεχόμενο ο μαθητής έχει βαθμό 15, B το ενδεχόμενο ο μαθητής έχει βαθμό μικρότερο του 14, Γ το ενδεχόμενο ο μαθητής έχει βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 16 και Δ το ενδεχόμενο ο μαθητής έχει βαθμό 19 ή 20.

Σύμφωνα με τον πίνακα, τα ενδεχόμενα είναι:

$$N(\Omega) = 25, \quad N(A) = 3, \quad N(B) = 8, \quad N(\Gamma) = 10, \quad N(\Delta) = 3$$

Οπότε έχουμε τις πιθανότητες:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{3}{25}$$

$$P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{8}{25} ,$$

$$P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{10}{25} = \frac{2}{5}$$

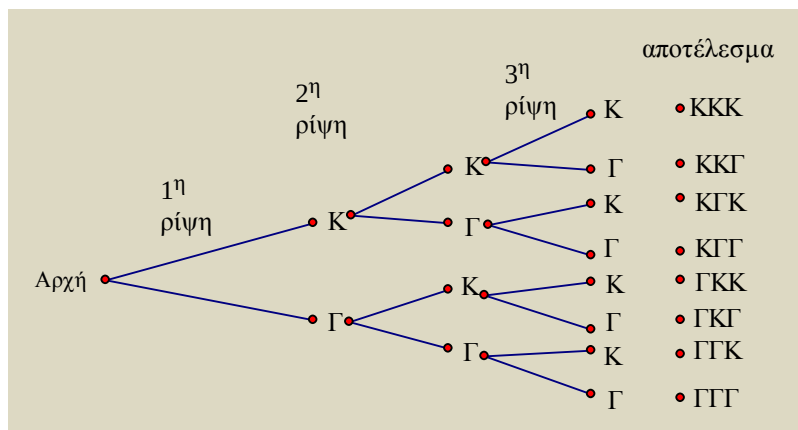
$$P(\Delta) = \frac{N(\Delta)}{N(\Omega)} = \frac{3}{25}$$

Άσκηση 6

Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις φορές ποια είναι η πιθανότητα να φέρουμε και τις τρεις φορές την ίδια ένδειξη ;

Λύση

Δημιουργούμε δενδροδιάγραμμα για να παραστήσουμε τις ρήψεις του νομίσματος θεωρώντας Κ τη κορώνα και Γ τα γράμματα:



Ο δειγματικός χώρος είναι ο $\Omega = \{ \text{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ} \}$
με $N(\Omega) = 8$

Θεωρούμε Α το ενδεχόμενο και οι τρεις ρίψεις να δείξουν την ίδια πλευρά:

$A = \{ \text{ΚΚΚ, ΓΓΓ} \}$ με $N(A) = 2$

Οπότε $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

Άσκηση 7

Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές . Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων

A «φέρνουμε και τις δύο φορές 6»

B «φέρνουμε την ίδια ένδειξη και τις δύο φορές»

Γ «φέρνουμε μία τουλάχιστον φορά 5»

Λύση

Αναπαριστούμε σε πίνακα τις πιθανές ενδείξεις των ζαριών:

2 ^η ρίψη 1 ^η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Σύνολο πιθανών συνδυασμών, $N(\Omega) = 36$

Ενδεχόμενο να έρθει και τις δυο φορές 6, $N(A) = 1$,

Ενδεχόμενο να φέρουμε την ίδια ένδειξη και στις δυο ρήψεις, $N(B) = 6$

Ενδεχόμενο να φέρουμε τουλάχιστον μια φορά 5, $N(\Gamma) = 11$

$$\text{Άρα } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{1}{36}, \quad P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}, \quad P(\Gamma) = \frac{N(\Gamma)}{N(\Omega)} = \frac{11}{36}$$

Άσκηση 8

Από τους 25 μαθητές μίας τάξης μόνο οι 12 έλυσαν μία άσκηση.

Αν επιλέξουμε έναν μαθητή στην τύχη, ποια είναι η πιθανότητα να μην έχει λύσει την άσκηση; Αν ο πρώτος μαθητής που επιλέξαμε δεν έλυσε την άσκηση και από τους υπόλοιπους επιλέξουμε στην τύχη έναν δεύτερο μαθητή, τότε ποια είναι η πιθανότητα ο δεύτερος μαθητής να έχει λύση την άσκηση;

Λύση

Θεωρούμε Ω τον δειγματικό χώρο και A το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει λύσει την άσκηση. Οπότε θα έχουμε τα ενδεχόμενα:

$$N(\Omega) = 25, N(A) = 12$$

Οπότε η πιθανότητα ο μαθητής να μην έχει λύσει την άσκηση είναι:

$$P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{N(A)}{N(\Omega)} = 1 - \frac{12}{25} = \frac{13}{25}$$

Εάν ο μαθητής που διαλέξαμε δεν έχει λύσει την άσκηση τότε αφαιρούμε ένα άτομο από τον δειγματικό χώρο. Οπότε για $N(\Omega) = 24$:

$$P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Άσκηση 9

Η πιθανότητα να μην πάει κάποιος στο θέατρο είναι τριπλάσια από την πιθανότητα να πάει. Ποια είναι η πιθανότητα τελικά να πάει στο θέατρο;

Λύση

Θεωρούμε Θ το ενδεχόμενο το άτομο να πάει στο θέατρο.

Οπότε το Θ' είναι το ενδεχόμενο το άτομο να μην πάει στο θέατρο.

Έχουμε από την υπόθεση ότι $P(\Theta') = 3P(\Theta)$.

Όμως από την θεωρία ισχύει ότι $P(\Theta) + P(\Theta') = 1$.

$$\text{Οπότε } P(\Theta) + 3P(\Theta) = 1 \Leftrightarrow P(\Theta) = \frac{1}{4}$$

Άσκηση 10

Για δύο ενδεχόμενα A και B ισχύουν $P(A) = \frac{3}{10}$, $P(B) = \frac{5}{10}$ και $P(A \cup B) = \frac{7}{10}$

Να βρείτε την πιθανότητα $P(A \cap B)$

Λύση

Εφαρμόζουμε τον τύπο της θεωρίας:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \quad (1)$$

$$(1) \Rightarrow \frac{7}{10} = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - P(A \cap B) \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{3}{10} + \frac{5}{10} - \frac{7}{10} = \frac{1}{10}$$

Άσκηση 11

Αν $P(A) = \frac{5}{14}$, $P(B') = \frac{11}{14}$ και $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, να βρείτε την πιθανότητα

$P(A \cap B)$

Λύση

Πρέπει να βρούμε την πιθανότητα $P(B)$ για να εφαρμόσουμε τη θεωρία:

$$P(B) = 1 - P(B') = 1 - \frac{11}{14} = \frac{3}{14}$$

$$\text{Οπότε } P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \frac{1}{2} = \frac{5}{14} + \frac{3}{14} - P(A \cap B) \Leftrightarrow$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{14}$$

Άσκηση 12

Η πιθανότητα να γνωρίζει κάποιος Αγγλικά είναι 42% , να γνωρίζει Γαλλικά είναι 21% και να γνωρίζει και τις δύο γλώσσες είναι 15% . Ποια είναι η πιθανότητα να γνωρίζει μία τουλάχιστον από τις γλώσσες ;

Λύση

Θεωρούμε A το ενδεχόμενο να ξέρει κάποιος Αγγλικά και Γ να γνωρίζει Γαλλικά, και $A \cap \Gamma$ είναι το ενδεχόμενο γνωρίζει και τις δύο γλώσσες. Οπότε έχουμε

$$P(A) = \frac{42}{100}, \quad P(\Gamma) = \frac{21}{100}, \quad P(A \cap \Gamma) = \frac{15}{100}$$

Το ενδεχόμενο να γνωρίζει τουλάχιστον μια από τις δυο γλώσσες είναι $A \cup \Gamma$.

$$\text{Οπότε } P(A \cup \Gamma) = P(A) + P(\Gamma) - P(A \cap \Gamma) = \frac{42}{100} + \frac{21}{100} - \frac{15}{100} = \frac{48}{100} = 48\%$$

Άσκηση 13

Ο καθηγητής των Μαθηματικών διαπίστωσε ότι , στο μάθημα της Γεωμετρίας , από τους 24 μαθητές ενός τμήματος οι 18 είχαν κανόνα, οι 14 είχαν διαβήτη και οι 20 είχαν κανόνα ή διαβήτη. Αν επιλέξουμε στην τύχη έναν μαθητή ποια είναι η πιθανότητα να έχει κανόνα και διαβήτη ;

Λύση

Θεωρούμε το ενδεχόμενο K ο μαθητής να έχει κανόνα, το Δ ο μαθητής να έχει διαβήτη. Τότε $K \cup \Delta$ είναι το ενδεχόμενο ο μαθητής να έχει κανόνα ή διαβήτη.

Οπότε έχουμε:

$$P(K) = \frac{18}{24}, \quad P(\Delta) = \frac{14}{24}, \quad P(K \cup \Delta) = \frac{20}{24}$$

Το ενδεχόμενο ένας μαθητής να έχει κανόνα και διαβήτη είναι το $K \cap \Delta$. Οπότε:

$$P(K \cup \Delta) = P(K) + P(\Delta) - P(K \cap \Delta) \Leftrightarrow \frac{20}{24} = \frac{18}{24} + \frac{14}{24} - P(K \cap \Delta) \Leftrightarrow$$

$$P(K \cap \Delta) = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$$

Απολαύστε τη διδασκαλία στα βίντεο του www.arnos.gr

Κατανοείτε σε βάθος τη μεθοδολογία επίλυσης!

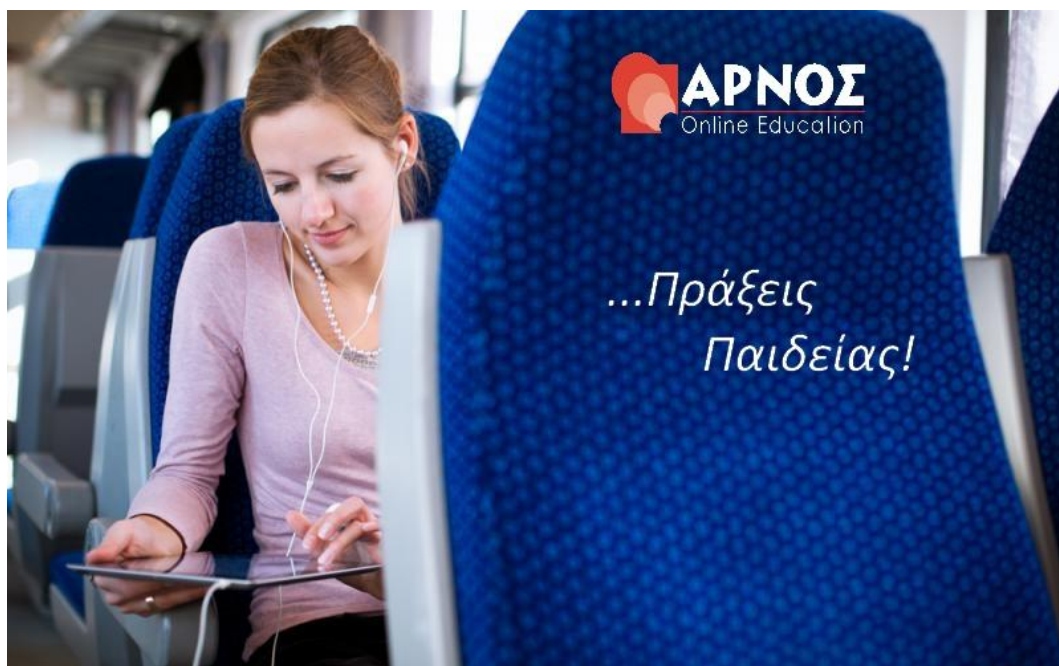


...Πράξεις Παιδείας!

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd - Μαθηματικός

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος **μόνο με 150 ευρώ!**



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία
για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης
& SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.





...Πράξεις Παιδείας!