του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.*

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΗ = ΑΖ,
ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

5. *Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι*
i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. *Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι $Z\hat{\Gamma}E = 90°$.*

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.*

5. *Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;*

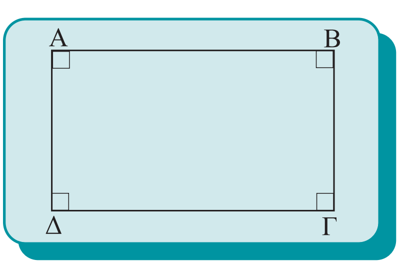
Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το ***ορθογώνιο***, το ***ρόμβο*** και το ***τετράγωνο***.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές**.

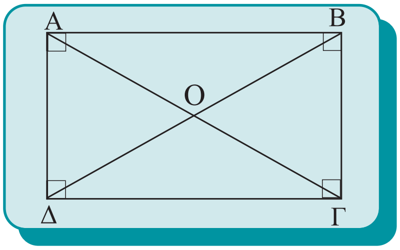
- **Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ορθογώνιο. Θα αποδείξουμε ότι οι διαγώνιοι ΑΓ και ΒΔ είναι ίσες (σχ.14).

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα ($\hat{A} = \hat{\Delta} = 90°$, ΑΔ κοινή, ΑΒ = ΔΓ), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 14

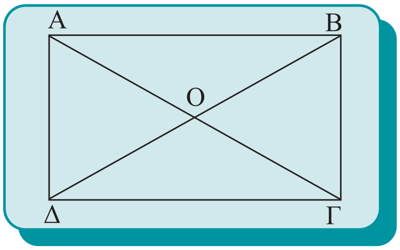
- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ορθογώνιο**

Ένα τετράπλευρο είναι ορθογώνιο, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Είναι **παραλληλόγραμμο** και έχει **μία ορθή** γωνία.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι **διαγώνιοί** του είναι **ίσες**.
(iii) Έχει **τρεις** γωνίες **ορθές.**
(iv) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ίσες.**

Απόδειξη

(i) Προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του παραλληλογράμμου.
ii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ = ΒΔ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα (ΑΒ = ΔΓ, ΑΓ = ΒΔ, ΑΔ κοινή), οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Αλλά $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\llcorner$. Επομένως, το ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο.
(iii) Αν έχει τρεις ορθές γωνίες θα είναι και η άλλη ορθή, αφού το άθροισμα των γωνιών κάθε τετραπλεύρου είναι $4\llcorner$.
(iv) Αν όλες οι γωνίες είναι ίσες, προφανώς όλες είναι ορθές.



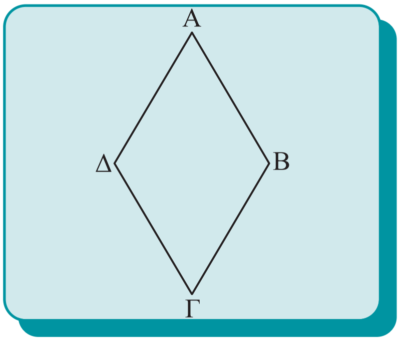
Σχήμα 15

5.4 Ρόμβος

Ορισμός

Ρόμβος λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει δύο διαδοχικές πλευρές ίσες.

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες προκύπτει ότι **όλες οι πλευρές του ρόμβου είναι ίσες**.



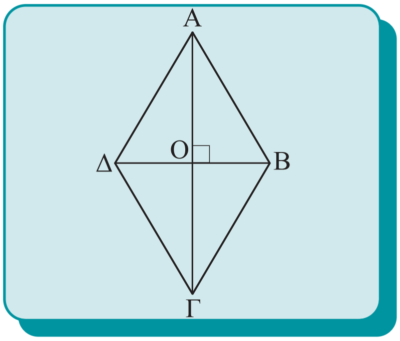
Σχήμα 16

- **Ιδιότητες του ρόμβου**

(i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται κάθετα.
ii) Οι διαγώνιοι του ρόμβου διχοτομούν τις γωνίες του.

Απόδειξη

Έστω ΑΒΓΔ ρόμβος. Επειδή το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, η διάμεσος του ΑΟ είναι ύψος του και διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. Επομένως ΑΓ⊥ΒΔ και η ΑΓ διχοτομεί την $\hat{A}$. Όμοια η ΑΓ διχοτομεί τη $\hat{\Gamma}$ και η ΒΔ τις $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$.

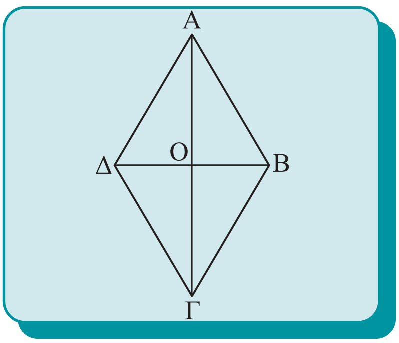


Σχήμα 17

- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο ρόμβος**

Ένα τετράπλευρο είναι ρόμβος, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Έχει **όλες** τις πλευρές του **ίσες**.
(ii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και **δύο διαδοχικές** πλευρές του είναι **ίσες**.
(iii) Είναι **παραλληλόγραμμο** και οι διαγώνιοί του τέμνονται **κάθετα**.
(iv) Είναι **παραλληλόγραμμο** και μία διαγώνιός του **διχοτομεί** μία γωνία του.



Σχήμα 18

Απόδειξη

(i) και (ii) Προκύπτουν άμεσα από τον ορισμό του ρόμβου.
(iii) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με ΑΓ⊥ΒΔ.
Στο τρίγωνο ΑΒΔ η ΑΟ είναι διάμεσος, αφού οι διαγώνιοι του παραλληλογράμμου διχοτομούνται. Επίσης, η ΑΟ είναι και ύψος, επειδή ΑΓ⊥ΒΔ. Άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε ΑΒ = ΑΔ. Επομένως το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.
(iv) Έστω ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο και ΑΓ διχοτόμος της $\hat{Α}$. Τότε πάλι το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές (αφού ΑΟ διχοτόμος και διάμεσος), οπότε το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος.

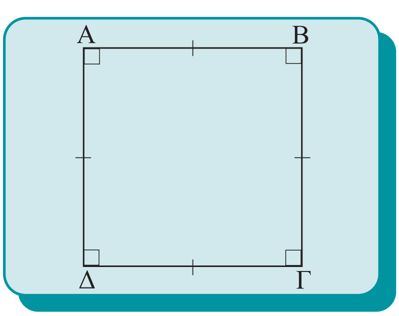
5.5 Τετράγωνο

Ορισμός

Τετράγωνο λέγεται το παραλληλόγραμμο που είναι ορθογώνιο και ρόμβος.

- **Ιδιότητες τετραγώνου**

Από τον ορισμό προκύπτει ότι το τετράγωνο έχει όλες τις ιδιότητες του ορθογωνίου και όλες τις ιδιότητες του ρόμβου. Επομένως, σε κάθε τετράγωνο:



Σχήμα 19

(i) Οι **απέναντι** πλευρές του είναι **παράλληλες**.
(ii) **Όλες** οι πλευρές του είναι **ίσες**.
(iii) **Όλες** οι γωνίες του είναι **ορθές**.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι **ίσες**, τέμνονται **κάθετα, διχοτομούνται** και **διχοτομούν** τις γωνίες του.

- **Κριτήρια για να είναι ένα τετράπλευρο τετράγωνο**

Για να αποδείξουμε ότι ένα **τετράπλευρο** είναι **τετράγωνο**, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι **ορθογώνιο** και **ρόμβος**.

Αποδεικνύεται ότι ένα **παραλληλόγραμμο** είναι τετράγωνο, αν ισχύει μία από τις παρακάτω προτάσεις:

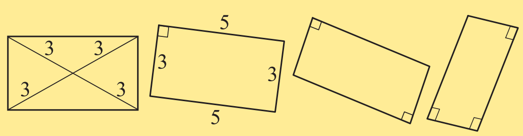
(i) Μία γωνία του είναι ορθή και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Μία γωνία του είναι ορθή και μία διαγώνιός του διχοτομεί μία γωνία του.
(iii) Μία γωνία του είναι ορθή και οι διαγώνιοί του κάθετες.
(iv) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και δύο διαδοχικές πλευρές του είναι ίσες.
(v) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και η μία διχοτομεί μία γωνία του.
(vi) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες και κάθετες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

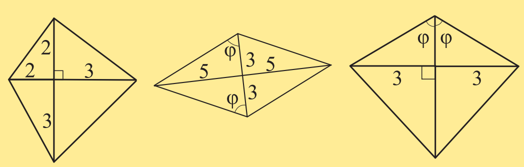
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι*
i) ορθογώνια,   ii) ρόμβοι,   iii) τετράγωνα,
ποια όχι και γιατί;

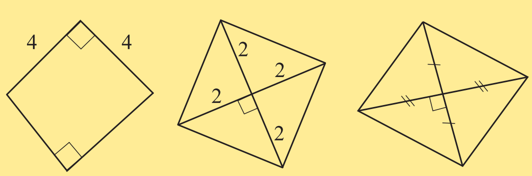
i)



ii)



iii)



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα* ***τετράπλευρο*** *είναι:*
i) Ορθογώνιο   ii) Ρόμβος

3. *Σε τι είδους τρίγωνα χωρίζονται τα παρακάτω σχήματα από τις διαγωνίους τους;*
i) Ορθογώνιο   ii) Ρόμβος   iii) Τετράγωνο

4. *Να αναφέρετε δύο ομοιότητες και δύο διαφορές που αφορούν πλευρές, γωνίες ή διαγωνίους μεταξύ των ζευγών των σχημάτων:*
i) Τετράγωνο – Ρόμβος   ii) Τετράγωνο – Ορθογώνιο
iii) Ορθογώνιο – Ρόμβος

5. *Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση:*

i) Οι διαγώνιοι του ρόμβου δεν είναι ίσες. ☐

ii) Όλες οι γωνίες του ρόμβου είναι ίσες. ☐

iii) Ένας ρόμβος με μία ορθή γωνία είναι τετράγωνο. ☐

iv) Κάθε τετράγωνο είναι ρόμβος. ☐

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ φέρουμε ΑΕ⊥ΔΓ και ΓΖ⊥ΑΒ. Να αποδείξετε ότι το ΑΖΓΕ είναι ορθογώνιο.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και ΒΔ = 2ΑΓ. Αν Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΟΒ και ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΕΓΖ είναι ορθογώνιο.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν οι διχοτόμοι των γωνιών παραλληλογράμμου δε συντρέχουν, τότε σχηματίζουν ορθογώνιο.*

4. *Να αποδείξετε ότι ένα παραλληλόγραμμο είναι ρόμβος, αν και μόνο αν οι αποστάσεις των απέναντι πλευρών του είναι ίσες.*

5. *Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ με κέντρο Ο. Παίρνουμε δύο σημεία Ε και Ζ της ΑΓ, ώστε ΟΕ = ΟΖ = ΟΒ = ΟΔ. Να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι τετράγωνο.*

6. *Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε σημεία Κ, Λ, Μ και Ν αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΑΚ = ΒΛ = ΓΜ = ΔΝ. Να αποδείξετε ότι το ΚΛΜΝ είναι τετράγωνο.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και Μ το μέσο της ΒΔ. Από το Δ φέρουμε παράλληλη προς τη ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε. Αν η ΕΜ τέμνει τη ΒΓ στο Ζ να αποδείξετε ότι το ΔΕΒΖ είναι ρόμβος.*

2. *Στις πλευρές ΑΒ και ΒΓ, τετραγώνου ΑΒΓΔ παίρνουμε σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε $ΑΕ = ΒΖ$. Να αποδείξετε ότι*
i) $ΑΖ = ΔΕ$,   ii) $ΑΖ \perp ΔΕ$.

3. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ, Ε και Ζ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα. Αν Η είναι το σημείο τομής των ΑΖ και ΒΕ και Θ το σημείο τομής των ΔΖ και ΓΕ, να αποδείξετε ότι το ΕΘΖΗ είναι ρόμβος.*

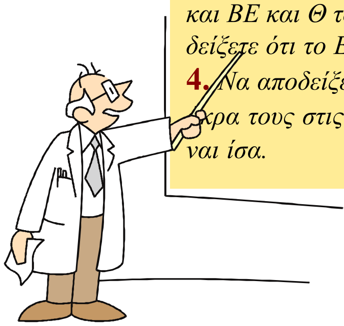
4. *Να αποδείξετε ότι αν δύο κάθετα τμήματα έχουν τα άκρα τους στις απέναντι πλευρές τετραγώνου, τότε είναι ίσα.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $\hat{B} = 45°$. Από το μέσο Μ της ΓΔ φέρουμε κάθετο πάνω στη ΓΔ και έστω Ε και Ζ τα σημεία στα οποία αυτή τέμνει τις ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα (ή τις προεκτάσεις τους). Να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΖ είναι τετράγωνο.*

2. *Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ φέρουμε $ΒΕ \perp ΑΓ$. Αν η διχοτόμος της γωνίας $Δ\hat{Β}Ε$ τέμνει τη ΓΔ στο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΒΓ = ΓΖ$.*

3. *Να αποδείξετε ότι: i) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου της βάσης ισοσκελούς τριγώνου από τις ίσες πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με ένα από τα ύψη του), ii) το άθροισμα των αποστάσεων τυχαίου σημείου, που βρίσκεται στο εσωτερικό ισοπλεύρου τριγώνου, από τις πλευρές του είναι σταθερό (και ίσο με το ύψος του).*

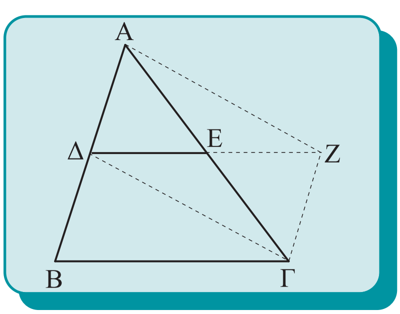


Εφαρμογές των παραλληλογράμμων

5.6 Εφαρμογές στα τρίγωνα

Θεώρημα Ι

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα μέσα των δύο πλευρών τριγώνου είναι παράλληλο προς την τρίτη πλευρά και ίσο με το μισό της.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τα μέσα Δ, Ε των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα (σχ.20). Θα αποδείξουμε ότι $ΔΕ \,//\!= \frac{ΒΓ}{2}$.

Προεκτείνουμε τη ΔΕ κατά τμήμα $ΕΖ = ΔΕ$. Το τετράπλευρο ΑΔΓΖ είναι παραλληλόγραμμο, αφού οι διαγώνιοί του διχοτομούνται. Άρα $ΑΔ = // ΓΖ$, οπότε $ΔΒ = // ΓΖ$, αφού $ΑΔ = ΔΒ$. Έτσι το τετράπλευρο ΔΖΓΒ είναι παραλληλόγραμμο, οπότε:

(i) $ΔΖ \,//\, ΒΓ$ άρα $ΔΕ \,//\, ΒΓ$ και

(ii) $ΔΖ = ΒΓ$ ή $2ΔΕ = ΒΓ$ ή $ΔΕ = \frac{ΒΓ}{2}$.

Θεώρημα ΙΙ

Αν από το μέσο μιας πλευράς ενός τριγώνου φέρουμε ευθεία παράλληλη προς μια άλλη πλευρά του, τότε η ευθεία αυτή διέρχεται από το μέσο της τρίτης πλευράς του.