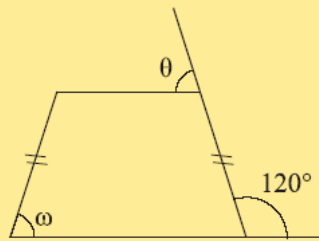
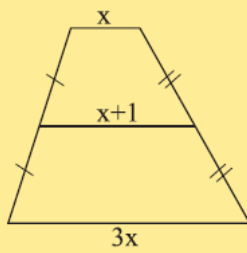
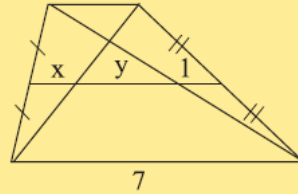
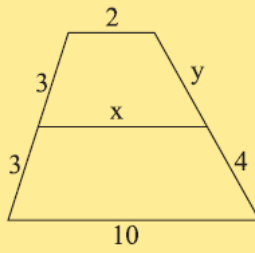


## ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

### Ερωτήσεις Κατανόησης

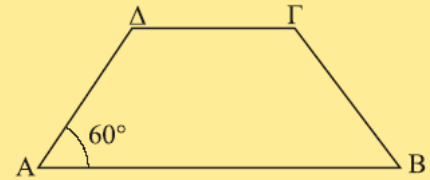
1. Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα  $x$ ,  $y$ ,  $\omega$  και  $\theta$ .



2. Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι ισοσκελές τραπέζιο;

3. Τι ονομάζεται διάμεσος τραπέζιου; Ποιες ιδιότητες έχει;

4. Στο ισοσκελές τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  είναι:  $AB = 5x$ ,  $\Delta\Gamma = 3x$  και  $\hat{A} = 60^\circ$ . Η περίμετρος του τραπέζιου είναι:



- i)  $10x$                       ii)  $11x$                       iii)  $12x$   
 iv)  $13x$                       v)  $14x$

Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

### Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται τραπέζιο  $AB\Gamma\Delta$  ( $AB \parallel \Gamma\Delta$ ) και η διάμεσός του

ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπέζιου.

2. Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

3. Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπέζιου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ, ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

4. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

5. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι

$$ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}.$$

6. Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ' και ΓΓ' οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β'Γ' και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι ΜΚ =

$$\frac{ΑΔ}{2}.$$

### Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι  $\widehat{ΒΗΓ} = 90^\circ$ .

2. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.

3. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$  και  $\widehat{Β} = 120^\circ$ . Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.

4. Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι  $\widehat{ΑΜΔ} = 90^\circ$ .

5. Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπέζιου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι  $ΒΜ \perp ΔΓ$ .

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να απο-

δείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

7. Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.

8. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με  $ΓΔ = 3ΑΒ$  και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;

9. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με  $ΓΔ = \frac{3}{2} ΑΒ$ . Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε  $\Theta Δ = ΔΓ - ΑΒ$ .

10. Αν Α', Β', Γ', Δ', Κ' είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι  $ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'$ .

### Σύνθετα θέματα

1. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχουμε  $ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ$ . Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών  $\widehat{Α}$  και  $\widehat{Δ}$  τέμνονται στη ΒΓ.

2. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με  $\widehat{Α} = \widehat{Δ} = 90^\circ$  και  $ΒΓ = 2ΓΔ$ . Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι  $\widehat{ΑΜΓ} = 3\widehat{ΜΑΒ}$ .

3. Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α', Β' και Γ' οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι  $ΑΑ' - ΓΓ' = ΒΒ'$  (με  $ΑΑ' > ΓΓ'$ ).

4. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ ( $\widehat{Α} = 90^\circ$ ) και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η.

Αν  $ΖΗ = \frac{3}{8} ΒΓ$ , να υπολογισθεί η γωνία  $\widehat{Β}$ .

5. Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) αν  $ΔΜ = ΔΓ$  και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε  $ΑΜ = ΒΕ$ ,

ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε  $ΑΕ = \frac{3}{4} ΒΓ$ .

