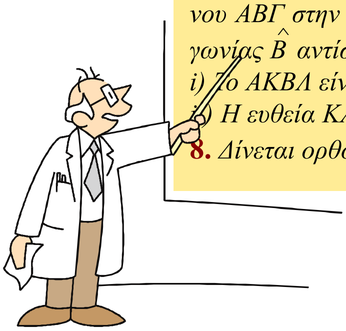


7. *Αν Κ και Λ είναι οι προβολές της κορυφής Α τριγώνου ΑΒΓ στην εσωτερική και εξωτερική διχοτόμο της γωνίας $\hat{B}$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) Το ΑΚΒΛ είναι ορθογώνιο.
ii) Η ευθεία ΚΛ διέρχεται από το μέσο της ΑΓ.

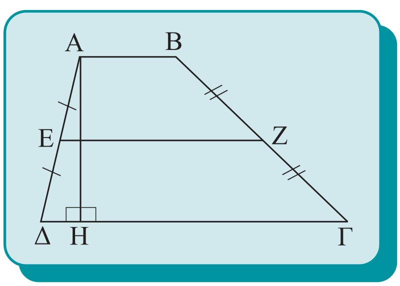
8. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 90°) το ύψος του ΑΔ και η διάμεσός του ΑΜ. Αν Ε, Ζ οι προβολές του Δ στις ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΔ = ΕΖ,
ii) ΑΜ⊥ΕΖ,
iii) Η διάμεσος ΑΜ το τμήμα ΔΖ και η παράλληλη προς την ΕΖ από το Β συντρέχουν.

Τραπέζια

5.10 Τραπέζιο

Ορισμός

Τραπέζιο λέγεται το κυρτό τετράπλευρο που έχει μόνο δύο πλευρές παράλληλες.



Σχήμα 34

Οι παράλληλες πλευρές ΑΒ και ΓΔ (σχ.34) του τραπεζίου ΑΒΓΔ λέγονται ***βάσεις*** του τραπεζίου.
Κάθε ευθύγραμμο τμήμα κάθετο στις βάσεις του τραπεζίου με τα άκρα του στους φορείς των βάσεων λέγεται ***ύψος*** του τραπεζίου.
Το ευθύγραμμο τμήμα ΕΖ που ενώνει τα μέσα των μη παράλληλων πλευρών του λέγεται ***διάμεσος*** του τραπεζίου.

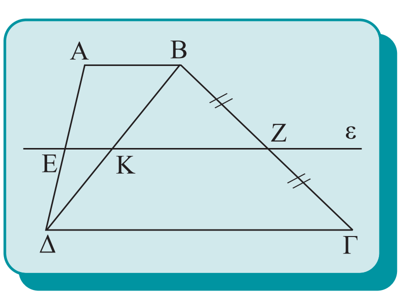
Θεώρημα Ι

Η διάμεσος του τραπεζίου είναι παράλληλη προς τις βάσεις του και ίση με το ημιάθροισμά τους.

Δηλαδή, αν ΕΖ διάμεσος του τραπεζίου ΑΒΓΔ, τότε:

i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ και ii) $ΕΖ = \frac{ΑΒ + ΓΔ}{2}$.

Απόδειξη



Σχήμα 35

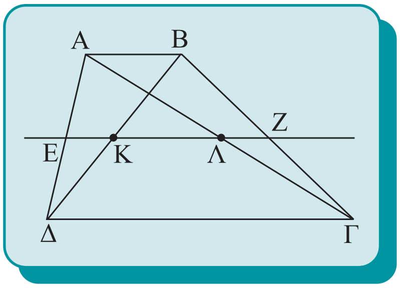
Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ // ΓΔ) (σχ.35), τη διαγώνιο του ΒΔ και Ε το μέσο της ΑΔ. Από το Ε φέρουμε ευθεία ε παράλληλη των ΑΒ και ΓΔ που τέμνει τις ΒΔ και ΒΓ στα Κ και Ζ αντίστοιχα. Τότε:
Στο τρίγωνο ΑΒΔ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΚ//ΑΒ, οπότε το Κ είναι το μέσο της ΒΔ και $ΕΚ = \frac{ΑΒ}{2}$ (1).
Επίσης στο τρίγωνο ΒΔΓ το Κ είναι μέσο της ΒΔ και ΚΖ//ΓΔ, οπότε το Ζ είναι το μέσο της ΒΓ και $ΚΖ = \frac{ΓΔ}{2}$ (2).
Επομένως η ΕΖ είναι διάμεσος του τραπεζίου και
i) ΕΖ // ΑΒ, ΓΔ (από κατασκευή).

ii) Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$$EK + KZ = \frac{AB}{2} + \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad EZ = \frac{AB + \Gamma\Delta}{2}.$$

Πορισμα

Η διάμεσος ΕΖ τραπεζίου ΑΒΓΔ διέρχεται από τα μέσα Κ και Λ των διαγωνίων του και το τμήμα ΚΛ είναι παράλληλο με τις βάσεις του και ίσο με την ημιδιαφορά των βάσεών του.



Σχήμα 36

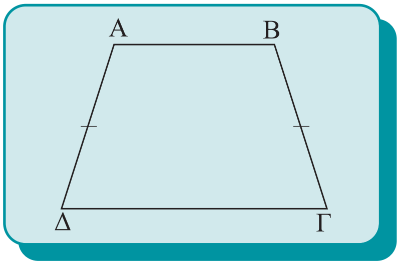
Απόδειξη

Αποδείξαμε παραπάνω ότι το Κ είναι μέσο της ΒΔ (σχ.35). Όμοια, αν φέρουμε την ΑΓ (σχ.36), στο τρίγωνο ΑΔΓ το Ε είναι μέσο της ΑΔ και ΕΛ // ΓΔ, οπότε το Λ είναι μέσο της ΑΓ και $E\Lambda = \frac{\Gamma\Delta}{2}$ (3).

Επομένως, η διάμεσος ΕΖ του τραπεζίου διέρχεται από τα μέσα Κ, Λ των διαγωνίων του και προφανώς ΚΛ // ΑΒ, ΓΔ. Επίσης από τις (1) και (3) προκύπτει ότι:

$$E\Lambda - EK = \frac{\Gamma\Delta}{2} - \frac{AB}{2} \quad \text{ή} \quad K\Lambda = \frac{\Gamma\Delta - AB}{2} \ (\text{με } \Gamma\Delta > AB).$$

5.11 Ισοσκελές τραπέζιο



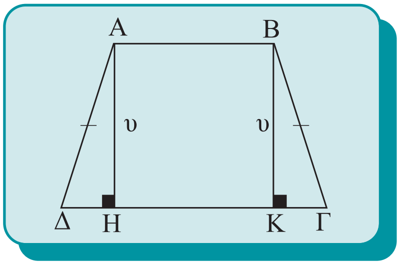
Σχήμα 37

Ορισμός

Ισοσκελές τραπέζιο λέγεται το τραπέζιο του οποίου οι μη παράλληλες πλευρές είναι ίσες.

- **Ιδιότητες ισοσκελούς τραπεζίου**

Αν ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, τότε:
(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

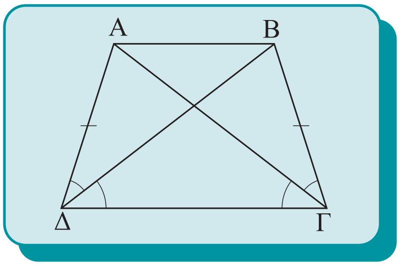


Σχήμα 38

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ=ΒΓ). Φέρουμε τα ύψη ΑΗ και ΒΚ. Τα τρίγωνα ΑΔΗ και ΒΚΓ είναι ίσα ($\hat{H} = \hat{K} = 90°$, ΑΔ = ΒΓ και ΑΗ = ΒΚ = υ), οπότε $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{A} + \hat{\Delta} = 180°$ και $\hat{B} + \hat{\Gamma} = 180°$ (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), έχουμε και $\hat{A} = \hat{B}$.

(ii) Τα τρίγωνα ΑΔΓ και ΒΔΓ (σχ. 39) είναι ίσα (ΑΔ = ΒΓ, ΓΔ κοινή και $A\hat{\Delta}\Gamma = B\hat{\Gamma}\Delta$), οπότε ΑΓ = ΒΔ.



Σχήμα 39

• Κριτήρια για να είναι ένα τραπέζιο ισοσκελές

Ένα τραπέζιο είναι ισοσκελές, αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις.

(i) Οι γωνίες που πρόσκεινται σε μια βάση του είναι ίσες.
(ii) Οι διαγώνιοί του είναι ίσες.

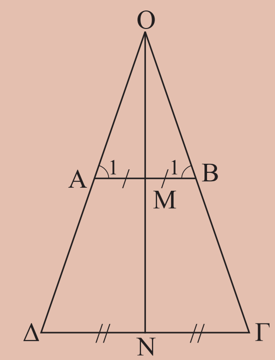
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να αποδειχθεί ότι σε κάθε ισοσκελές τραπέζιο:
(i) αν προεκτείνουμε τις μη παράλληλες πλευρές του σχηματίζονται δύο ισοσκελή τρίγωνα,
(ii) η ευθεία που διέρχεται από τα μέσα των βάσεων είναι μεσοκάθετος της κάθε βάσης.

Απόδειξη

(i) Έστω ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο (ΑΒ//ΓΔ) και Ο το σημείο τομής των ΑΔ και ΒΓ. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΔΓ είναι ισοσκελή, αφού $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ και $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}$ (ΑΒΓΔ ισοσκελές τραπέζιο).

(ii) Η μεσοκάθετος ε της βάσης ΑΒ διέρχεται από το Ο, επειδή το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές. Η ε είναι κάθετος και στη ΓΔ επειδή ΓΔ//ΑΒ. Αφού η ε διέρχεται από το Ο, είναι και ύψος του ισοσκελούς τριγώνου ΟΓΔ, άρα μεσοκάθετος και στη ΓΔ.

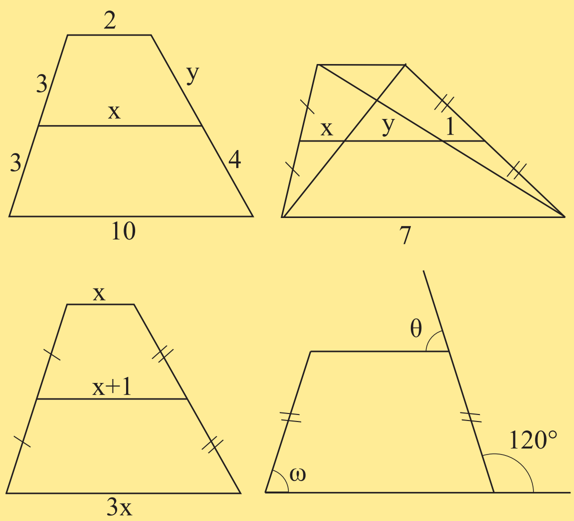


Σχήμα 40

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

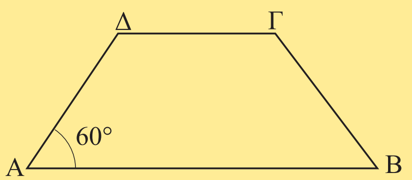
1. *Από τα παρακάτω τραπέζια να βρείτε τα x, y, ω και θ.*



2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα* ***τετράπλευρο*** *είναι ισοσκελές τραπέζιο;*

3. *Τι ονομάζεται διάμεσος τραπεζίου; Ποιες ιδιότητες έχει;*

4. *Στο ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ είναι: ΑΒ = 5x, ΔΓ = 3x και $\hat{A}$ = 60°. Η περίμετρος του τραπεζίου είναι:*



i) 10x ii) 11x iii) 12x
iv) 13x v) 14x
Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) και η διάμεσός του*

ΕΖ. Αν οι μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ, ΒΓ τέμνονται στο Κ και Η, Θ είναι τα μέσα των ΚΑ και ΚΒ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι τα Ε, Ζ, Η, Θ είναι κορυφές τραπεζίου.

2. *Αν Δ και Ε είναι τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), να αποδείξετε ότι το ΔΕΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

3. *Οι διαγώνιοι ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) τέμνονται στο Ο. Αν Ε, Ζ, Η, Θ είναι τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ, ΟΓ ,ΟΔ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΕΖΗΘ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

4. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και το ύψος του ΑΕ. Αν Κ, Λ είναι τα μέσα των ΑΔ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΚΛΓΕ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

5. *Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ και τα ύψη του ΑΕ και ΒΖ. Να αποδείξετε ότι* $ΔΕ = ΓΖ = \frac{ΓΔ - ΑΒ}{2}$.

6. *Από την κορυφή Α τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία ε που δεν τέμνει το τρίγωνο και ας είναι ΒΒ' και ΓΓ' οι αποστάσεις των Β και Γ από την ευθεία ε. Αν Μ είναι το μέσο της Β'Γ' και Κ το μέσο της διαμέσου ΑΔ να αποδείξετε ότι* $ΜΚ = \frac{ΑΔ}{2}$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ(ΑΒ//ΓΔ) η διχοτόμος της γωνίας του Β τέμνει τη διάμεσο του ΕΖ στο Η. Να αποδείξετε ότι* $Β\hat{Η}Γ = 90°$.

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) Μ είναι το μέσο της ΑΒ. Αν η μεσοκάθετος της ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και η παράλληλη από το Ζ προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Η, να αποδείξετε ότι ΓΗ = ΑΖ.*

3. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$ *και* $\hat{Β} = 120°$. *Αν ΑΒ = 2α και ΒΓ = α να υπολογίσετε τη διάμεσο ΕΖ, ως συνάρτηση του α.*

4. *Σε ένα τραπέζιο ΑΒΓΔ, η μία από τις μη παράλληλες πλευρές του ΑΔ είναι ίση με το άθροισμα των βάσεων. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι* $Α\hat{Μ}Δ = 90°$.

5. *Από το μέσο Ε της πλευράς ΒΓ ισοσκελούς τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) φέρουμε παράλληλη προς την ΑΔ που τέμνει τη ΔΓ στο Μ. Να αποδείξετε ότι ΒΜ⊥ΔΓ.*

6. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος του ΑΗ. Αν Δ, Ε, Ζ είναι τα μέσα των ΑΒ, ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΔΕΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο.*

7. *Αν σε τραπέζιο η μία βάση είναι διπλάσια της άλλης, να αποδείξετε ότι οι διαγώνιοι χωρίζουν τη διάμεσο σε τρία ίσα τμήματα.*

8. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΓΔ = 3ΑΒ και Κ, Λ τα μέσα των διαγωνίων του ΔΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το ΑΚΛΒ είναι παραλληλόγραμμο. Πότε αυτό είναι ορθογώνιο;*

9. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με* $ΓΔ = \frac{3}{2}ΑΒ$. *Αν Ε, Ζ, Η είναι τα μέσα των ΑΒ, ΒΓ και ΔΕ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το ΑΒΖΗ είναι παραλληλόγραμμο. Αν η προέκταση της ΑΗ τέμνει τη ΓΔ στο Θ, τότε ΘΔ = ΔΓ – ΑΒ.*

10. *Αν Α', Β', Γ', Δ', Κ' είναι οι προβολές των κορυφών και του κέντρου Κ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ αντίστοιχα σε ευθεία ε που αφήνει όλες τις κορυφές του προς το ίδιο μέρος της, να αποδείξετε ότι* ΑΑ' + ΒΒ' + ΓΓ' + ΔΔ' = 4ΚΚ'.

Σύνθετα θέματα

1. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) έχουμε ΑΔ = ΑΒ + ΓΔ. Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών* $\hat{Α}$ *και* $\hat{Δ}$ *τέμνονται στη ΒΓ.*

2. *Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ με* $\hat{Α} = \hat{Δ} = 90°$ *και ΒΓ = 2ΓΔ. Αν Μ είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι* $Α\hat{Μ}Γ = 3Μ\hat{Α}Β$.

3. *Μια ευθεία ε διέρχεται από την κορυφή Δ ενός παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ και έχει εκατέρωθεν αυτής τις κορυφές Β και Γ. Αν Α΄, Β΄ και Γ΄ οι προβολές των Α, Β και Γ αντίστοιχα στην ευθεία ε, να αποδείξετε ότι ΑΑ' – ΓΓ' = ΒΒ' (με ΑΑ' > ΓΓ').*

4. *Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓ* ($\hat{Α} = 90°$) *και Δ, Ε τα μέσα των ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα. Από το μέσο Ζ του ΑΔ φέρουμε παράλληλη προς την ΑΓ που τέμνει τη ΒΓ στο Η. Αν* $ΖΗ = \frac{3}{8}ΒΓ$ *,να υπολογισθεί η γωνία* $\hat{Β}$.

5. *Σε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΒ//ΓΔ) με ΑΒ < ΓΔ, έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι*

i) αν ΔΜ = ΔΓ και η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει τη ΔΜ στο Ε, τότε ΑΜ = ΒΕ,

ii) αν Ε είναι το μέσο της ΔΜ, τότε $ΑΕ = \frac{3}{4}ΒΓ$.