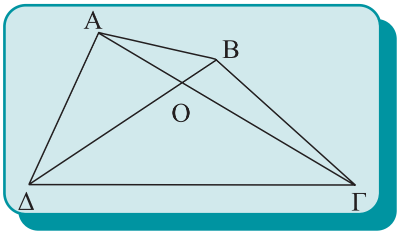
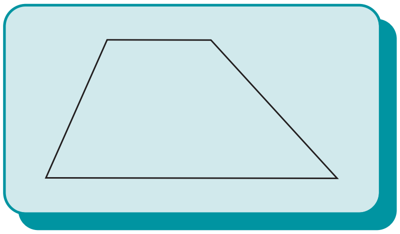
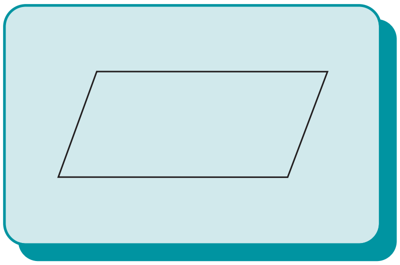
5.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.20, το ευθύγραμμο σχήμα που έχει τέσσερις πλευρές λέγεται τετράπλευρο. Κάθε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ (σχ.1) έχει δύο διαγωνίους ΑΓ και ΒΔ, οι οποίες τέμνονται σε εσωτερικό σημείο τους.
Στα επόμενα, όταν λέμε τετράπλευρο, θα εννοούμε **κυρτό** τετράπλευρο.
Το τετράπλευρο που έχει δύο μόνον πλευρές παράλληλες λέγεται ***τραπέζιο*** (σχ.2), ενώ το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές παράλληλες λέγεται ***παραλληλόγραμμο*** (σχ.3).



Σχήμα 1


Σχήμα 2


Σχήμα 3

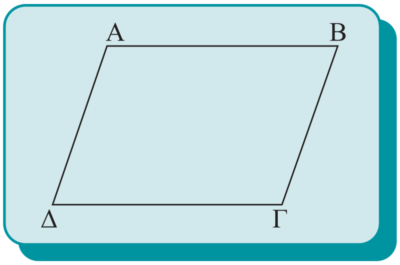
5.2 Παραλληλόγραμμα

Παραλληλόγραμμο

Ορισμός

Παραλληλόγραμμο λέγεται το τετράπλευρο που έχει τις απέναντι πλευρές του παράλληλες.

Δηλαδή το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο, όταν ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ.



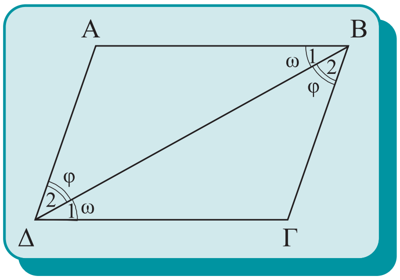
Σχήμα 4

- **Ιδιότητες παραλληλογράμμων**

Σε κάθε παραλληλόγραμμο ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

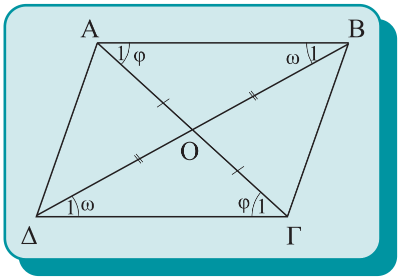
(i) Οι απέναντι πλευρές του είναι ίσες.
(ii) Οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες.
(iii) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη των i), ii)
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ (σχ. 5). Έχουμε:
$\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ (εντός εναλλάξ).
ΒΔ κοινή πλευρά.
$\hat{B}_2 = \hat{\Delta}_2 = \varphi$ (εντός εναλλάξ).
Άρα τα τρίγωνα ΑΒΔ, ΒΓΔ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ. Επίσης έχουμε $\hat{A} = \hat{\Gamma}$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi + \omega$.



Σχήμα 5

Απόδειξη της ιδιότητας iii)
Συγκρίνουμε τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ. Έχουμε:



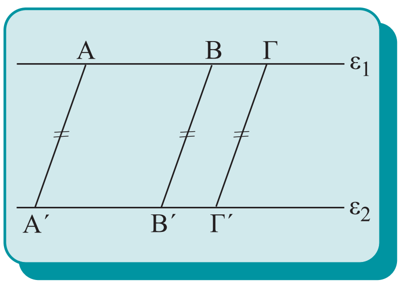
Σχήμα 6

ΑΒ = ΓΔ
$\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = ω$ (εντός εναλλάξ).
$\hat{Α}_1 = \hat{Γ}_1 = φ$ (εντός εναλλάξ).
Άρα, τα τρίγωνα ΟΑΒ, ΟΓΔ είναι ίσα, οπότε ΟΑ = ΟΓ και ΟΒ =ΟΔ.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Το σημείο τομής των διαγωνίων παραλληλογράμμου είναι κέντρο συμμετρίας του.

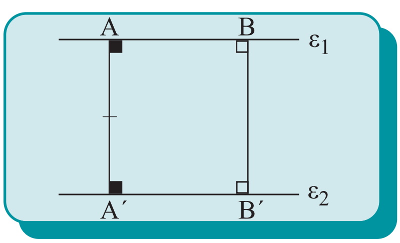
Για το λόγο αυτό λέγεται ***κέντρο*** του παραλληλογράμμου.



Σχήμα 7

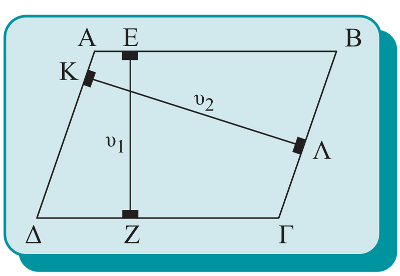
ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Παράλληλα τμήματα που έχουν τα άκρα τους σε δύο παράλληλες ευθείες είναι ίσα (σχ.7).



Σχήμα 8

Αν τα τμήματα (σχ.8) είναι **κάθετα** στις παράλληλες, το κοινό μήκος τους λέγεται ***απόσταση*** των παραλλήλων. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα που έχει τα άκρα του στις ευθείες των απέναντι πλευρών παραλληλογράμμου και είναι κάθετο σε αυτές λέγεται ***ύψος*** του παραλληλογράμμου, ενώ οι απέναντι πλευρές του λέγονται ***βάσεις*** ως προς αυτό το ύψος (σχ.9).



Σχήμα 9

• **Κριτήρια για παραλληλόγραμμα**

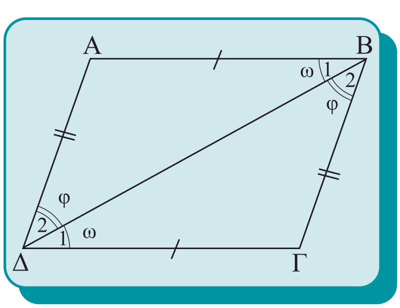
Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε προτάσεις (κριτήρια) οι οποίες εξασφαλίζουν ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο: Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν ισχύει μια από τις παρακάτω προτάσεις:

(i) Οι απέναντι πλευρές ανά δύο είναι ίσες.
(ii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες και παράλληλες.
(iii) Οι απέναντι γωνίες ανά δύο είναι ίσες.
(iv) Οι διαγώνιοί του διχοτομούνται.

Απόδειξη

Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Για να αποδείξουμε τα κριτήρια, θα πρέπει σύμφωνα με τον ορισμό να αποδείξουμε ότι σε κάθε περίπτωση, οι απέναντι πλευρές του τετραπλεύρου είναι παράλληλες.

(i) Έστω ΑΒ = ΓΔ και ΑΔ = ΒΓ (σχ.10). Αν φέρουμε τη διαγώνιο ΒΔ, τότε σχηματίζονται τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ που είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, ΑΔ = ΒΓ και ΒΔ κοινή πλευρά. Άρα $\hat{Β}_1 = \hat{Δ}_1 = ω$ και $\hat{Β}_2 = \hat{Δ}_2 = φ$, οπότε ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

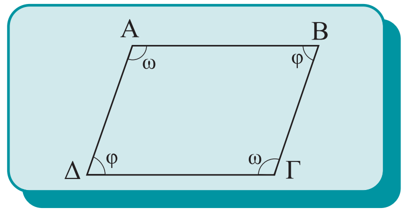


Σχήμα 10

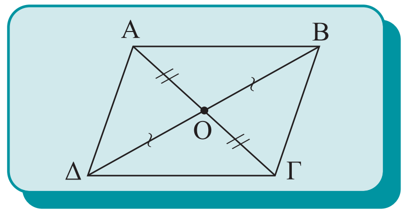
(ii) Έστω ΑΒ// = ΓΔ (σχ.10). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΒΓΔ είναι ίσα, γιατί ΑΒ = ΓΔ, $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$ και η ΒΔ είναι κοινή πλευρά. Επομένως, όμοια με το (i), το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.

(iii) Αν $\hat{A} = \hat{\Gamma} = \omega$ και $\hat{B} = \hat{\Delta} = \varphi$ (σχ.11) η σχέση $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta} = 4\llcorner$ γράφεται $2\omega + 2\varphi = 4\llcorner$ ή $\varphi + \omega = 2\llcorner$. Επομένως, έχουμε ότι $\hat{A} + \hat{\Delta} = 2\llcorner$, οπότε ΑΒ // ΓΔ και $\hat{A} + \hat{B} = 2\llcorner$, οπότε ΑΔ // ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο**.**

(iv) Έστω ΑΟ = ΟΓ και ΟΒ = ΟΔ (σχ.12). Τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ, καθώς και τα τρίγωνα ΑΟΔ και ΒΟΓ είναι ίσα. Επομένως, όμοια με το (i), θα είναι ΑΒ//ΓΔ και ΑΔ//ΒΓ, δηλαδή το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο.



Σχήμα 11

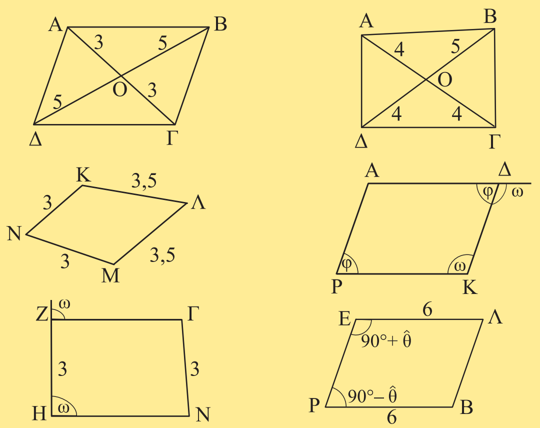


Σχήμα 12

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

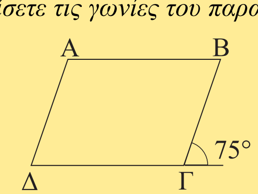
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Ποια από τα παρακάτω τετράπλευρα είναι παραλληλόγραμμα, ποια όχι και γιατί;*

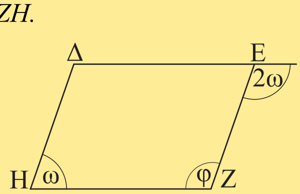


2. *Με ποιους τρόπους μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο;*

3. *Να υπολογίσετε τις γωνίες του παραλληλογράμμου.*



4. *Να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ του παραλληλογράμμου ΔΕΖΗ.*



5. *Ένα τετράπλευρο είναι παραλληλόγραμμο αν:*

i) Δύο απέναντι γωνίες είναι ίσες. ☐

ii) Οι διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές. ☐

iii) Δύο απέναντι πλευρές του είναι ίσες. ☐

iv) Δύο απέναντι πλευρές του είναι παράλληλες. ☐

(Σημειώστε x σε κάθε σωστή πρόταση).

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Η διχοτόμος της $\hat{A}$ τέμνει τη ΔΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΓ.*

2. *Έστω Ο το κέντρο παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Αν Ε και Ζ σημεία των ΟΑ και ΟΓ αντίστοιχα, ώστε ΟΕ = ΟΖ, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΕΔΖ είναι παραλληλόγραμμο.*

3. *Έστω Ε και Ζ, τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα, παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο.
ii) οι ΑΓ, ΒΔ και ΕΖ συντρέχουν.

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Η παράλληλη από το Δ προς την ΑΒ τέμνει την ΑΓ στο Ε. Αν η παράλληλη από το Ε προς τη ΒΓ τέμνει την ΑΒ στο Ζ, να αποδείξετε ότι ΑΕ = ΒΖ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Μ της βάσης του ΒΓ. Φέρουμε ΜΕ//ΑΒ (Ε σημείο* *του ΑΓ) και ΜΔ//ΑΓ (Δ σημείο του ΑΒ). Να αποδείξετε ότι ΜΔ + ΜΕ = ΑΒ.*

2. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ε σημείο της ΑΓ. Φέρουμε ΔΖ//ΒΕ (Ζ σημείο του ΑΓ). Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΖ.*

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε τη ΔΓ κατά τμήμα ΓΕ = ΔΓ και τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΖ = ΔΑ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Β και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των διαμέσων ΒΔ και ΓΕ παίρνουμε σημεία Η και Ζ αντίστοιχα τέτοια, ώστε ΔΗ = ΒΔ και ΖΕ = ΓΕ. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΗ = ΑΖ,
ii) τα σημεία Ζ, Α και Η είναι συνευθειακά.

5. *Από σημείο Α να φέρετε τέμνουσα δύο παράλληλων ευθειών με τρόπο, ώστε το μεταξύ των παραλλήλων τμήμα της να είναι ίσο με δοσμένο τμήμα λ.*

Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τα σημεία Ε, Ζ, Η και Κ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΓΗ και ΒΖ = ΔΚ. Να αποδείξετε ότι*
i) το τετράπλευρο ΕΖΗΚ είναι παραλληλόγραμμο,
ii) οι ΑΓ, ΒΔ, ΕΗ και ΚΖ συντρέχουν.

2. *Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΒ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και επί της ημιευθείας ΔΑ θεωρούμε σημείο Ζ, ώστε ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι* $Ζ\hat{Γ}Ε = 90^\circ$.

3. *Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΒΓ και την ΑΔ κατά τμήμα ΔΖ = ΔΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Ζ, Γ και Ε είναι συνευθειακά.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της ΑΓ. Προεκτείνουμε την ΑΒ κατά τμήμα ΒΕ = ΓΔ. Να αποδείξετε ότι η ΒΓ διχοτομεί τη ΔΕ.*

5. *Ένα ποταμός, του οποίου οι όχθες είναι ευθύγραμμες, διέρχεται μεταξύ δύο χωριών που απέχουν άνισες αποστάσεις από τις όχθες του. Σε ποια θέση πρέπει να κατασκευασθεί μια γέφυρα κάθετη προς τον ποταμό, ώστε τα δύο χωριά να βρίσκονται σε ίσες αποστάσεις από τις αντίστοιχες εισόδους της γέφυρας;*

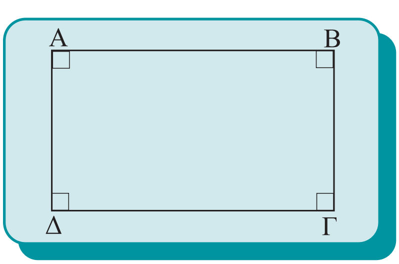
Είδη παραλληλογράμμων

Στην παράγραφο αυτή θα μελετήσουμε τα είδη των παραλληλογράμμων, δηλαδή τα παραλληλόγραμμα που έχουν και κάποιες επιπλέον ιδιότητες. Διακρίνουμε τρία είδη παραλληλογράμμων: το ***ορθογώνιο***, το ***ρόμβο*** και το ***τετράγωνο***.

5.3 Ορθογώνιο

Ορισμός

Ορθογώνιο λέγεται το παραλληλόγραμμο που έχει μία γωνία ορθή.



Σχήμα 13

Επειδή στο παραλληλόγραμμο οι απέναντι γωνίες του είναι ίσες, ενώ δύο διαδοχικές γωνίες του είναι παραπληρωματικές (ως εντός και επί τα αυτά μέρη), προκύπτει ότι **όλες οι γωνίες του ορθογωνίου είναι ορθές**.

- **Ιδιότητες ορθογωνίου**

Οι διαγώνιοι του ορθογωνίου είναι ίσες.