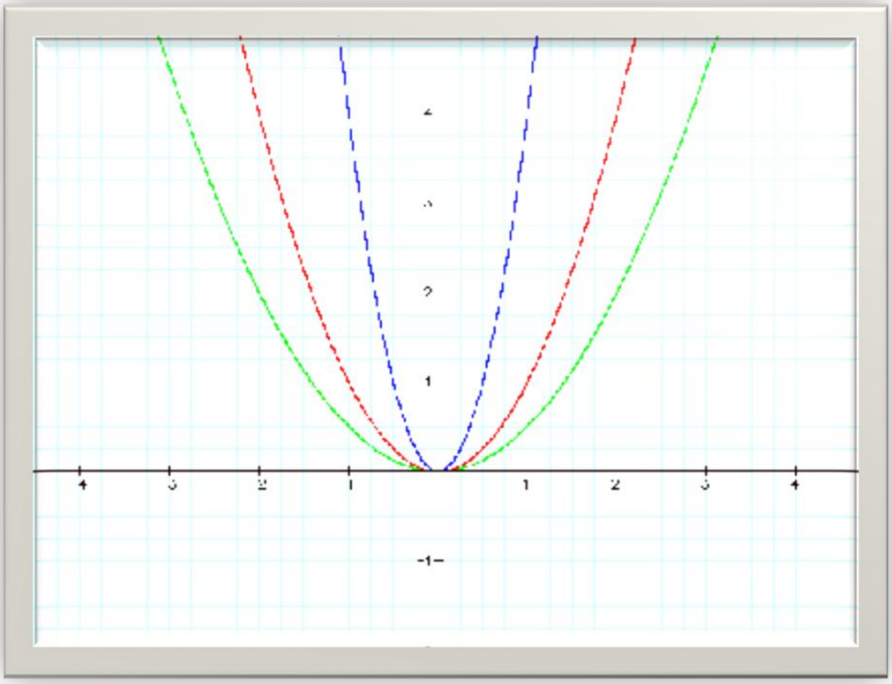
4. Συναρτήσεις



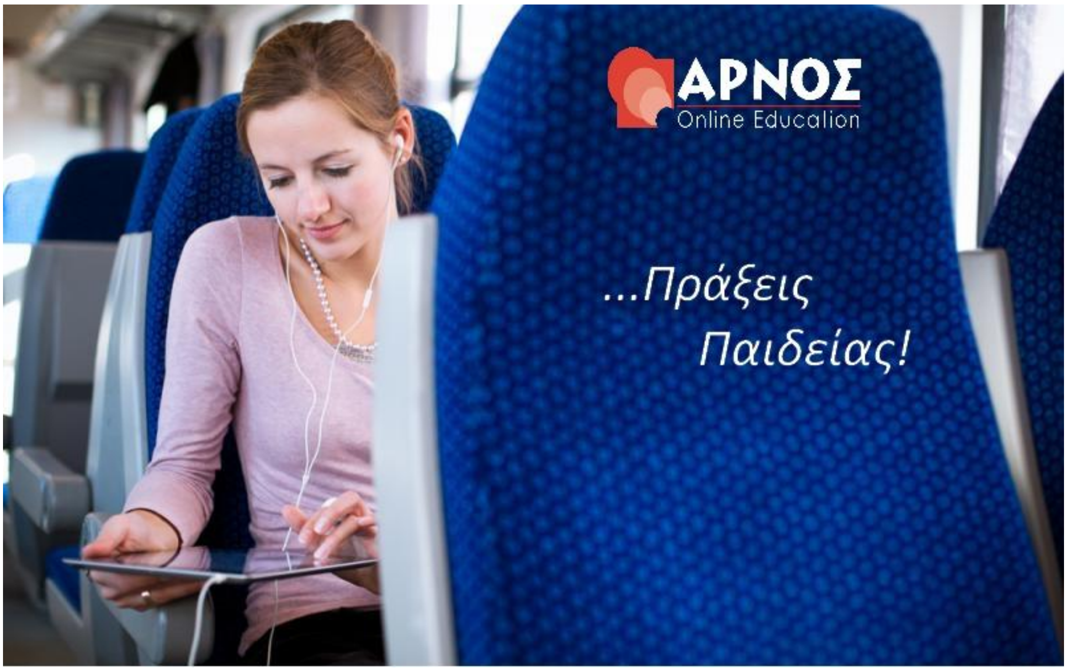
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου

4.2 Η συνάρτηση y=αx^2

σχ. βιβλίο (σ.σ. 154-156)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία
για όλο το σχολικό έτος μόνο με 150 ευρώ!



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σσ. 154-156)

4.2 Η συνάρτηση $y = αx^2 + βx + γ$ με $α \neq 0$

Ερωτήσεις κατανόησης

Ερώτηση 1

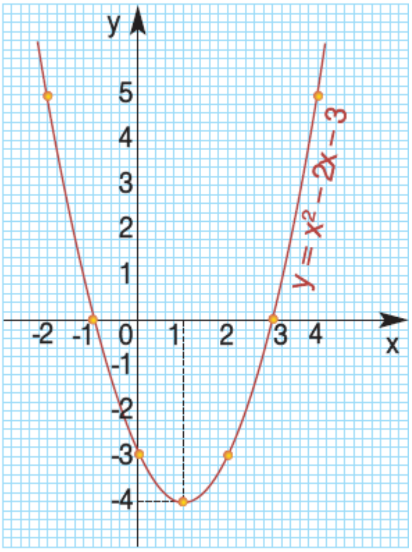
Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x - 3$.

Να συμπληρώσετε τα κενά στις παρακάτω προτάσεις

α) Η γραφική παράσταση είναι …….. με κορυφή το σημείο ……… και άξονα συμμετρίας την ευθεία ……..

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει ……… τιμή y = ……. όταν x = …. .. .

γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία …… , ……. και τον άξονα y΄y στο σημείο …….



Απάντηση

α) Η γραφική παράσταση είναι παραβολή με κορυφή το σημείο (1 , –4) και άξονα συμμετρίας την ευθεία x = 1

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει ελάχιστη τιμή y = – 4 όταν x = 1

γ) Η γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία (–1 , 0) , (3 , 0) και τον άξονα y΄y στο σημείο (0 , –3).

Ερώτηση 2

Να επιλέξετε την σωστή απάντηση. Η παραβολή $y = 4x^2 + 2$ έχει :

i) Κορυφή το σημείο α) (4 , 2) β) (0 , 4) γ) (0 , 2) δ) (2 , 0)

ii) Άξονα συμμετρίας την ευθεία με εξίσωση

α) x = 2 β) y = 0 γ) x = 0 δ) y = 2

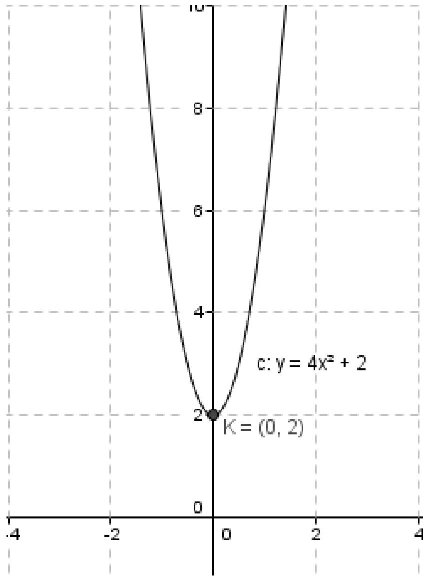
Απάντηση

Η παραβολή $y = 4x^2 + 2$ παίρνει ελάχιστη τιμή για

x = 0 , y = 0 + 2 = 2

i) Άρα έχει ελάχιστο (κορυφή) στο σημείο Κ(0 , 2)

ii) Κάθε εξίσωση της μορφής $y = αx^2 + β$ έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Ο οποίοw συμπίπτει με την ευθεία με εξίσωση x = 0. Άρα η σωστή απάντηση είναι η γ.



Ερώτηση 3

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές και με (Λ) αν είναι λανθασμένες

α) Η συνάρτηση $y = -2x^2 - 5x + 4$ παίρνει ελάχιστη τιμή

β) Η παραβολή $y = x^2 - x + 2$ τέμνει τον άξονα yy΄ στο σημείο Α(0 , 2)

γ) Ο άξονας y΄y είναι άξονας συμμετρίας της παραβολής $y = 3x^2 - 7$

δ) Η κορυφή της παραβολής $y = (x + 1)^2$ είναι σημείο του άξονα x΄x

ε) Η κορυφή της παραβολής $y = x^2 + 2$ είναι σημείο του άξονα y΄y

Απάντηση

α) Είναι λάθος (Λ), διότι εξίσωση έχει αρνητικό συντελεστή α = – 2, άρα παρουσιάζει μέγιστο.

β) Είναι σωστό (Σ), διότι για x = 0 => y = 2, οπότε η εξίσωση τέμενι τον y΄y στο σημείο (0 , 2),

γ) Είναι σωστό (Σ), διότι είναι της μορφής $y = αx^2 + β$

δ) Είναι σωστό (Σ), διότι η $y = (x + 1)^2$ παίρνει ελάχιστη τιμή για x = - 1. Οπότε y = 0 ελάχιστη τιμή που ανήκει στον x΄x.

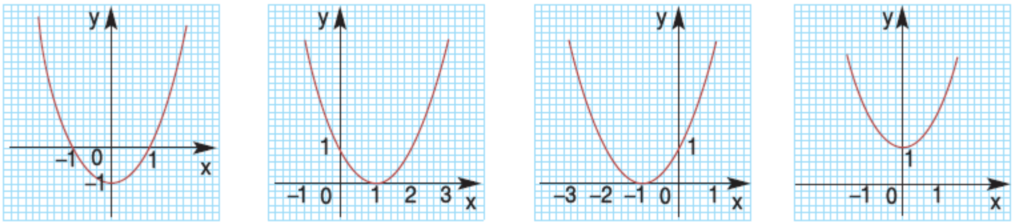
ε) Είναι σωστό (Σ), διότι η παραβολή $y = x^2 + 2$ παίρνει ελάχιστη τιμή(κορυφή) για x = 0 => y = 2 και το (0, 2) ανήκει στον y΄y.

Ερώτηση 4

Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα αντιστοιχίζοντας σε κάθε παραβολή την εξίσωσή της .

1. $y = (x + 1)^2$ **2.** $y = x^2 - 1$ **3.** $y = x^2 + 1$ **4.** $y = (x - 1)^2$

α) β) γ) δ)



α	β	γ	δ

Απάντηση

1. Η $y = (x + 1)^2$ διέρχεται από τα σημεία (0, 1) και (- 1, 0). Οπότε αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση γ.

2. Η $y = x^2 - 1$ διέρχεται από τα σημεία (- 1, 0), (0, - 1) και (1, 0). Οπότε αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση α.

3. Η $y = x^2 + 1$ έχει ελάχιστο στο (0, 1). Οπότε αντιστοιχεί στην γραφική παράσταση δ.

4. Η $y = (x - 1)^2$ αντιστοιχεί στην β.

α	β	γ	δ
2	4	1	3

Ερώτηση 5

Ορισμένες τιμές της συνάρτησης $y = αx^2 + βx + γ$, με $α < 0$ φαίνονται στον παρακάτω πίνακα

x	–2	–1	0	1	2	3	4
y	–5	0	3	4	3	0	–5

Να συμπληρώστε τα κενά σε κάθε μία από τις παρακάτω προτάσεις

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία ….. και κορυφή το σημείο …….

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή y = … όταν x = …

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία ……………. και τον άξονα y΄y στο σημείο …….

Απάντηση

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι παραβολή με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$ και κορυφή το σημείο $(1 , 4)$

β) Η συνάρτηση αυτή παίρνει μέγιστη τιμή $y = 4$ όταν $x = 1$

γ) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία $(-1 , 0)$ και $(3, 0)$ και τον άξονα y΄y στο σημείο $(0 , 3)$

Ασκήσεις

Άσκηση 1

Να σχεδιάσετε τις παραβολές **α)** $y = x^2 + 2x - 3$ **β)** $y = -2x^2 + 4x + 6$

Λύση

α) Η $y = x^2 + 2x - 3$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $\gamma = -3$

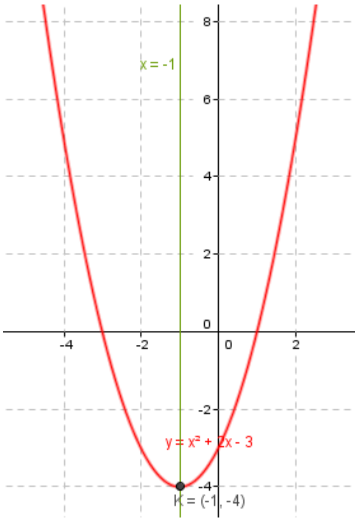
Έχουμε ότι $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{2}{2} = -1$ και $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha}$

$= -\dfrac{2^2 - 4\cdot 1\cdot(-3)}{4\cdot 1} = -4$,

Άρα άξονας συμμετρίας της συνάρτησης είναι η $x = -1$ με ελάχιστο το $K(-1, -4)$, διότι $\alpha > 0$.

Υπολογίζουμε κάποιες κοντινές τιμές κοντά στον άξονα συμμετρίας.

x	−3	−2	−1	0	1
y	0	−3	−4	−3	0



β) Η $y = -2x^2 + 4x + 6$ είναι της μορφής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, με $\alpha = -2$, $\beta = 4$, $\gamma = 6$

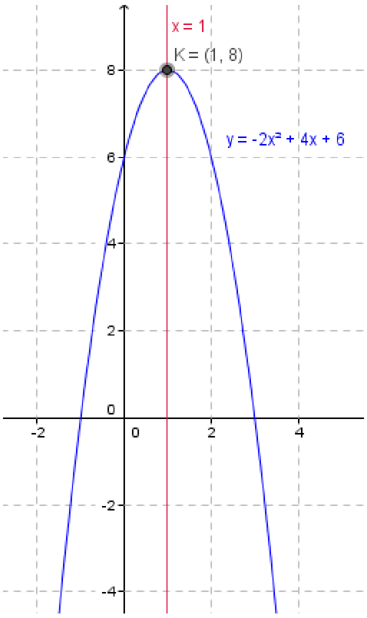
Έχουμε ότι $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{4}{2\cdot(-2)} = 1$ και $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha} =$

$-\dfrac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -\dfrac{4^2 - 4\cdot 6\cdot(-2)}{4\cdot(-2)} = 8$,

Άρα άξονας συμμετρίας της συνάρτησης είναι η $x = 1$ με μέγιστο το $K(1, 8)$, διότι $\alpha < 0$.

Υπολογίζουμε κάποιες κοντινές τιμές κοντά στον άξονα συμμετρίας.

x	−1	0	1	2	3
y	0	6	8	6	0



Άσκηση 2

Να βρείτε την μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή κάθε συνάρτησης

α) $y = 3x^2 - 12x + 11$ **β)** $y = -4x^2 - 8x + 1$ **γ)** $y = -2(x-6)^2 + 7$

Λύση

α) Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο διότι $\alpha = 3 > 0$

Με τετμημένη στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{12}{6} = 2$

και τεταγμένη την $y = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-12)^2 - 4\cdot 3\cdot 11}{4\cdot 3} = -1$

β) Η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστο διότι $\alpha = -4 < 0$

με τετμημένη στο $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{8}{-8} = -1$

και τεταγμένη στο $y = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{(-8)^2 - 4\cdot(-4)\cdot 1}{4\cdot(-4)} = 5$

γ) Απλοποιούμε την εξίσωση για να τη φέρουμε στη μορφή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

$y = -2(x^2 - 12x + 36) + 7 = -2x^2 + 24x - 65$

Επιλύω όπως και στις προηγούμενες περιπτώσεις και προκύπτει ότι η γραφική παράστασης της εξίσωσης παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = -\frac{24}{-4} = 6$

το $y = -\frac{\Delta}{4\alpha} = -\frac{24^2 - 4\cdot(-2)\cdot(-65)}{4\cdot(-2)} = 7$

Άσκηση 3

Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 2x$ για $-4 \leq x \leq 2$ και με την βοήθεια αυτής να βρεθούν οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2 + 2x = 3$

Λύση

Η $y = x^2 + 2x$ παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο

με τετμημένη στο $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -\dfrac{2}{2} = -1$

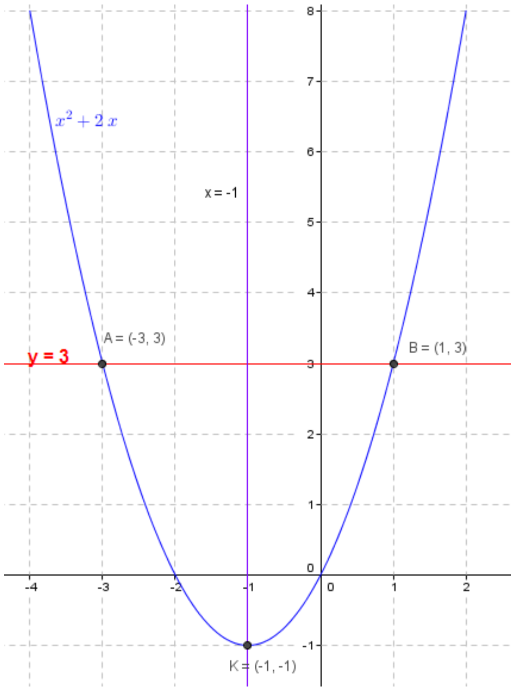
και τεταγμένη στο $y = -\dfrac{\Delta}{4\alpha} = -\dfrac{4}{4} = -1$

Δηλαδή έχει κορυφή το Κ $(-1\,,\ -1)$

και είναι συμμετρική ως προς την $x = -1$

Υπολογίζουμε κάποιες βοηθητικές τιμές για να κάνουμε την γραφική παράσταση.

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2
y	8	3	0	−1	0	3	8



Η γραφική λύση της εξίσωσης $x^2 + 2x = 3$ δίνεται από τα σημεία τομής Α(- 3, 3) και Β(1, 3), της γραφικής παράστασης της $y = x^2 + 2x$ και της ευθείας $y = 3$.

Άρα οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $x^2 + 2x = 3$ είναι οι $x = -3$ και $x = 3$.

Άσκηση 4

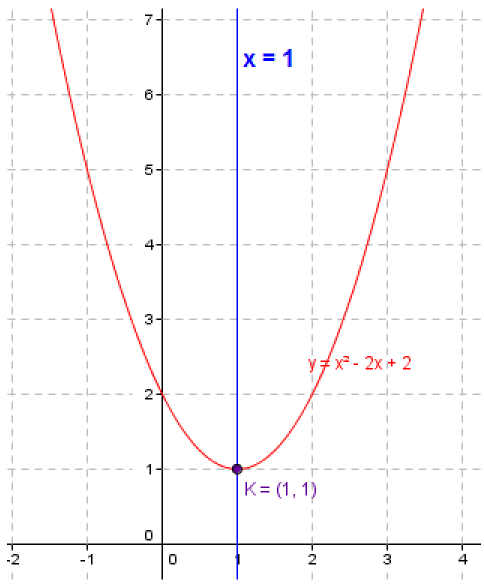
Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x + 2$ και με τη βοήθεια αυτής να αποδείξετε ότι $x^2 + 2 > 2x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Λύση

Η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο στο

$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{2}{2} = 1$ το $y = -\frac{\Delta}{4\alpha} = \frac{2}{2} = 1$

Δηλαδή έχει κορυφή το Κ(1, 1) με άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 1$.



Για να αποδείξουμε ότι $x^2 + 2 > 2x$ για κάθε πραγματικό αριθμό x, αρκεί να αποδείξουμε ότι $x^2 - 2x + 2 > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Αυτό όμως ισχύει γιατί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 - 2x + 2$ είναι πάνω από τον άξονα $x'x$ Δηλαδή $y > 0$ για κάθε πραγματικό αριθμό x.

Άσκηση 5

Δίνεται η συνάρτηση $y = x^2 + 3x + \lambda$

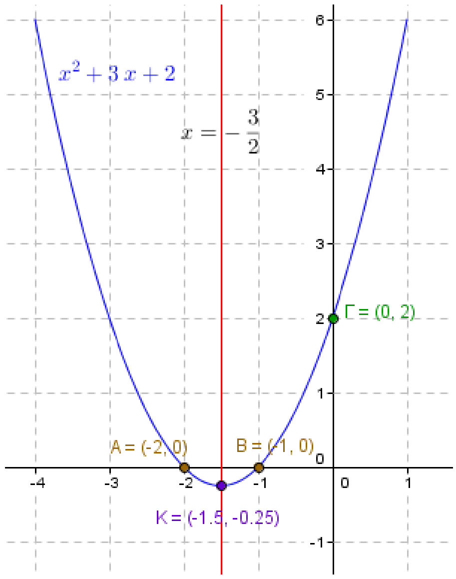
α) Για ποια τιμή του πραγματικού αριθμού λ , το σημείο Α(1 , 6) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης ;

β) Αν $\lambda = 2$, να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της συνάρτησης για $-4 \le x \le 1$ και να βρείτε τα κοινά σημεία της με τους άξονες .

Λύση

α) Το σημείο το σημείο Α(1 , 6) ανήκει στη γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = x^2 + 3x + \lambda$ αν και μόνο αν $6 = 1^2 + 3 \cdot 1 + \lambda \Leftrightarrow \lambda = 2$

β) Για λ = 2 αντικαθιστούμε και προκύπτει η εξίσωση $y = x^2 + 3x + 2$ η οποία είναι παραβολή και παρουσιάζει ελάχιστο στο σημείο $K\left(-\frac{3}{2}\ ,\ -\frac{1}{4}\right)$



Υπολογίζουμε τα γειτονικά σημεία για να χαράξουμε την παραβολή

x	−4	−3	−2	−1	0	1
y	6	2	0	0	2	6

.

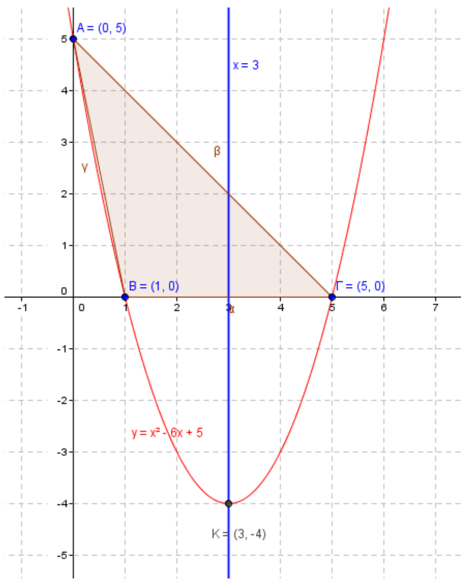
Οπότε και προκύπτουν τα σημεία τομής της παραβολής με τους άξονες.

Α(−2 , 0) και Β (−1 , 0) τα σημεία τομής με τον άξονα x’x και Γ(0 , 2) το σημείο τομής με τον y’y.

Άσκηση 6

Να σχεδιάσετε την παραβολή $y = x^2 - 6x + 5$. Αν Α, Β, Γ είναι τα κοινά σημεία της με τους άξονες , να υπολογίσετε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ.

Λύση



Κατά τα γνωστά η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο διότι έχει α = 1 > 0, με κορυφή το σημείο $K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, -\frac{\Delta}{4\alpha}\right)$ δηλαδή Κ (3, − 4)

και άξονας συμμετρίας τον x = 3.

Έστω Α το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον y’y και τα σημεία Β, Γ στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον x’x.

Για x = 0 έχουμε $y = 0^2 - 6\cdot 0 + 5 = 5$ απ’ όπου προκύπτει ότι το σημείο τομής της γραφικής παράστασης με τον y’y είναι το Α (0 , 5)

Για y = 0 έχουμε $0 = x^2 - 6x + 5 \Leftrightarrow (x-1)(x-5) = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 5$

απ’ όπου προκύπτει ότι τα σημεία Β, Γ στα οποία η γραφική παράσταση τέμνει τον x’x είναι τα Β (1 , 0) και Γ (5 , 0).

Το εμβαδόν (ΑΒΓ) του τριγώνου ΑΒΓ είναι:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{\text{ΒΓ}\cdot\text{ΑΟ}}{2} = \frac{4\cdot 5}{2} = 10$$

Άσκηση 7

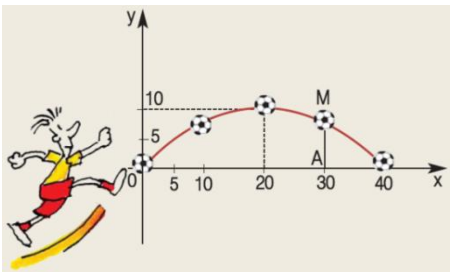
Να βρείτε τους αριθμούς β , γ ώστε η συνάρτηση $y = x^2 + \beta x + \gamma$ για $x = 4$ να παίρνει ελάχιστη τιμή $y = -7$

Λύση

Αντικαθιστούμε τις τιμές x, y με τα δεδομένα της υπόθεσης και τη θεωρία και έχουμε ότι: $-\frac{\beta}{2\alpha} = 4 \Leftrightarrow -\frac{\beta}{2} = 4 \Leftrightarrow \beta = -8$

καθώς και $-\frac{\Delta}{4\alpha} = -7 \Leftrightarrow -\frac{\beta^2 - 4\alpha\gamma}{4\alpha} = -7 \Leftrightarrow \frac{(-8)^2 - 4\cdot 1\cdot\gamma}{4\cdot 1} = 7 \Leftrightarrow \gamma = 9$

Άσκηση 8



Ένας ποδοσφαιριστής έδιωξε την μπάλα από το σημείο Ο, η οποία , αφού διέγραψε μία παραβολική τροχιά με μέγιστο ύψος 10 m , έφτασε σε απόσταση 40 m .

α) Να αποδείξετε ότι η παραβολή έχει

εξίσωση $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$, με $0 \le x \le 40$

β) Ποια ήταν η απόσταση της μπάλας από το έδαφος όταν αυτή βρισκόταν στο σημείο Μ που έχει τετμημένη 30 και σε ποιο άλλο σημείο της τροχιάς η μπάλα απείχε από το έδαφος την ίδια απόσταση ;

Λύση

α) Η μπάλα θα ακολουθήσει παραβολική τροχειά η οποία θα υπακούει στην εξίσωση $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ **(1)** με $\alpha < 0$, διότι παρουσιάζει μέγιστο.

Η μπάλα θα περάσει διαδοχικά από τα σημεία (0 , 0) , (20 , 10) και (40 , 0) δεχόμενοι ότι στη μέση της πορείας της θα βρίσκεται στο μέγιστο ύψος.

Σημείο (0 , 0)

$0 = \alpha\cdot 0^2 + \beta\cdot 0 + \gamma \Leftrightarrow \gamma = 0$

Σημείο (20 , 10)

$10 = \alpha\cdot 20^2 + \beta\cdot 20 + \gamma \Leftrightarrow 400\alpha + 20\beta = 10 \Leftrightarrow 400\alpha + 20\beta = 10 \Leftrightarrow$

$40\alpha + 2\beta = 1$ **(2)**

Σημείο (40 , 0)

$0 = \alpha\cdot 40^2 + \beta\cdot 40 + \gamma \Leftrightarrow 1600\alpha + 40\beta = 0 \Leftrightarrow 1600\alpha + 40\beta = 0 \Leftrightarrow$

$40\alpha + \beta = 0$ **(3)**

Αφαιρούμε κατά μέλη τις (2), (3) και προκύπτει $\beta = 1$

Άρα (3) => $\alpha = -\frac{1}{40}$

Άρα η εξίσωση (1) είναι της μορφής $y = -\frac{1}{40}x^2 + x$

β) Αντικαθιστώ τη τετμημένη $x = 30$ απ' όπου προκύπτει $y = -\frac{1}{40}\cdot 30^2 + 30 = 7,5$

Άρα όταν η μπάλα πέρναγε από το σημείο Μ είχε ύψος 7,5 m.

Το ίδιο ύψος είχε η μπάλα και όταν πέρναγε από σημείο συμμετρικό του Μ ως προς την $x = 20$, και αυτό το σημείο είναι το (10 , 7,5)

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd - Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!