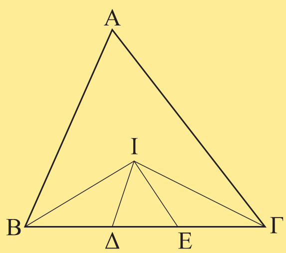
$Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ$.

5. *Από το έγκεντρο $Ι$ τριγώνου $ΑΒΓ$ φέρουμε $ΙΔ//ΑΒ$ και $ΙΕ//ΑΓ$. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου $ΔΙΕ$ ισούται με τη $ΒΓ$.*



Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$, η διχοτόμος του $ΒΔ$ και η εξωτερική διχοτόμος του $Βx$. Θεωρούμε δύο σημεία $Ε$ και $Κ$ της πλευράς $ΑΒ$. Αν ο κύκλος $(Ε,ΕΒ)$ τέμνει τη $ΒΔ$ στο $Ζ$, ενώ ο κύκλος $(Κ,ΚΒ)$ τέμνει τη $Βx$ στο $Μ$, να αποδείξετε ότι $ΕΖ//ΜΚ$.*

2. *Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος $ΑΒ$ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες $Αx$ και $Βy$. Παίρνουμε $Γ$ τυχαίο σημείο του $ΑΒ$, και στις $Αx$,$Βy$ τα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα, ώστε $ΑΔ = ΑΓ$ και $ΒΕ = ΒΓ$. Να αποδείξετε ότι η γωνία $Δ\hat{Γ}Ε$ είναι ορθή.*

3. *Από το παράκεντρο $Ι_α$ τριγώνου $ΑΒΓ$ με $ΑΒ<ΑΓ$ φέρουμε παράλληλη στην $ΑΒ$, που τέμνει τις πλευρές $ΒΓ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Δ$ και $Ε$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΔΕ = ΑΕ – ΒΔ$.*

4. *Δίνεται τρίγωνο $ΑΒΓ$ με $ΑΒ<ΑΓ$ και $Μ$ σημείο της πλευράς $ΒΓ$. Από το $Μ$ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο $ΑΔ$ της γωνίας $\hat{Α}$, που τέμνει τις $ΑΒ$ και $ΑΓ$ στα σημεία $Ε$ και $Ζ$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

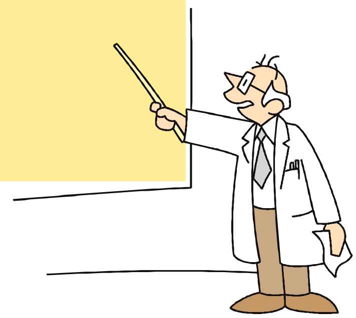
i) Το τρίγωνο $ΕΑΖ$ είναι ισοσκελές.

ii) $ΒΕ+ΓΖ$ = σταθερό.

iii) Αν $Μ$ μέσο της $ΒΓ$ τότε:

α) $ΒΕ = ΓΖ = \dfrac{ΑΓ+ΑΒ}{2}$,

β) $ΑΕ = ΑΖ = \dfrac{ΑΓ – ΑΒ}{2}$.



4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

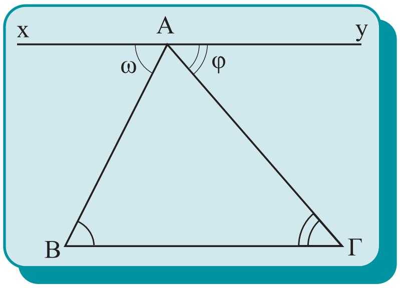
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την $Α$, φέρουμε ευθεία $xy//ΒΓ$. Τότε $ω = \hat{Β}$ (1) και $φ = \hat{Γ}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και $ΒΓ$ με τέμνουσες $ΑΒ$ και $ΑΓ$ αντίστοιχα.

Αλλά $ω + \hat{Α} + φ = 2∟$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{Α} + \hat{Β} + \hat{Γ} = 2∟.$$



Σχήμα 18

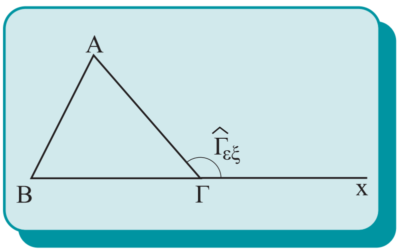
Πορισματα

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.

ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες, μία προς μία, έχουν και τις τρίτες γωνίες τους ίσες.

iii) Οι οξείες γωνίες ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι συμπληρωματικές.

iv) Κάθε γωνία ισόπλευρου τριγώνου είναι 60º.



Σχήμα 19

Απόδειξη

i) Έχουμε $\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}+\hat{\Gamma}=2\llcorner$, οπότε

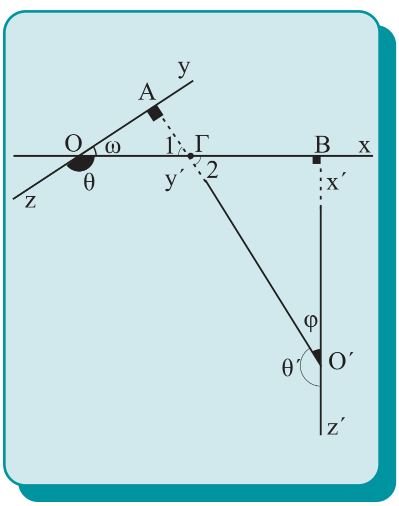
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}=\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}+\hat{\Gamma} \quad \text{ή} \quad \boxed{\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}=\hat{A}+\hat{B}}.$$

ii) – iv) Προφανή.

4.7 Γωνίες με πλευρές κάθετες

Θεώρημα

Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.



Σχήμα 20

Απόδειξη

Έστω οι γωνίες $x\hat{O}y=\omega$ και $x'\hat{O}'y'=\varphi$ με $Ox \perp O'x'$ και $Oy \perp O'y'$.

Τα τρίγωνα ΟΑΓ και Ο΄ΒΓ έχουν $\hat{A}=\hat{B}=1\llcorner$ και $\hat{\Gamma}_1=\hat{\Gamma}_2$ (κατακορυφήν).

Άρα θα έχουν και τις άλλες γωνίες ίσες, οπότε ω = φ.

Πορισματα

i) Δύο αμβλείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες είναι ίσες.

ii) Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες αλλά η μία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία είναι παραπληρωματικές.

Απόδειξη

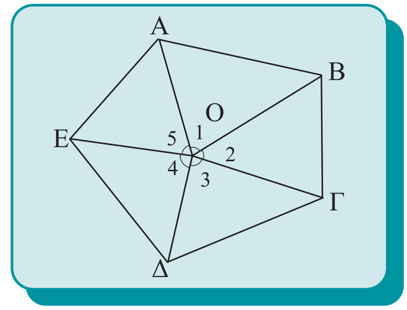
i) Πράγματι, (σχ. 20) είναι $\theta+\omega=2\llcorner$, $\theta'+\varphi=2\llcorner$, οπότε $\theta=\theta'$, αφού ω = φ.

ii) Πράγματι, (σχ.20) είναι $\theta+\omega=2\llcorner$, οπότε $\theta+\varphi=2\llcorner$, αφού ω = φ.

4.8 Άθροισμα γωνιών κυρτού ν-γώνου

Ας θεωρήσουμε κυρτό πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ και Ο τυχαίο εσωτερικό σημείο του. Αν ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του πενταγώνου, σχηματίζονται πέντε τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές. Έτσι το άθροισμα των γωνιών και των πέντε τριγώνων είναι (2·5) ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+\hat{O}_4+\hat{O}_5$ = 4 ορθές, θα μείνει το άθροισμα των γωνιών του πενταγώνου, δηλαδή:

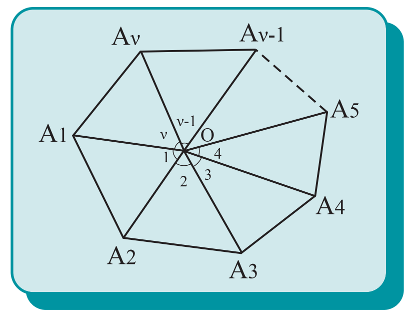
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}+\hat{E} = (2\cdot 5 - 4) \text{ ορθές.}$$



Σχήμα 21

Όμοια, αν το κυρτό πολύγωνο έχει ν πλευρές και ενώσουμε το Ο με τις κορυφές του σχηματίζονται ν τρίγωνα. Το άθροισμα των γωνιών των ν τριγώνων είναι 2ν ορθές. Αν αφαιρέσουμε το άθροισμα των γωνιών $\hat{O}_1+\hat{O}_2+\hat{O}_3+ \ldots +\hat{O}_\nu$ = 4 ορθές έχουμε:

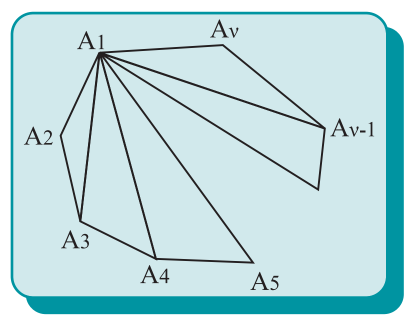
$$\hat{A}_1+\hat{A}_2+\hat{A}_3+\ldots+\hat{A}_\nu = (2\nu - 4) \text{ ορθές.}$$



Σχήμα 22

Καταλήξαμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι πρέπει:
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου να είναι 2ν-4 ορθές.

Άλλη απόδειξη. Ας θεωρήσουμε κυρτό πολύγωνο $A_1A_2\ldots A_\nu$ με ν πλευρές και ας φέρουμε από μια κορυφή του, π.χ. την A_1 όλες τις διαγωνίους που διέρχονται από αυτή. Έτσι το πολύγωνο διαιρείται σε ν-2 τρίγωνα, γιατί σε καθεμιά από τις πλευρές του, εκτός των A_1A_2 και A_1A_ν που διέρχονται από την κορυφή A_1, αντιστοιχεί ένα τρίγωνο. Επειδή το άθροισμα των γωνιών των ν-2 τριγώνων είναι 2(ν-2)=(2ν-4) ορθές και ισούται με το άθροισμα των γωνιών του πολυγώνου, προκύπτει ότι:
Το άθροισμα των γωνιών κυρτού ν-γώνου είναι 2ν-4 ορθές.



Σχήμα 23

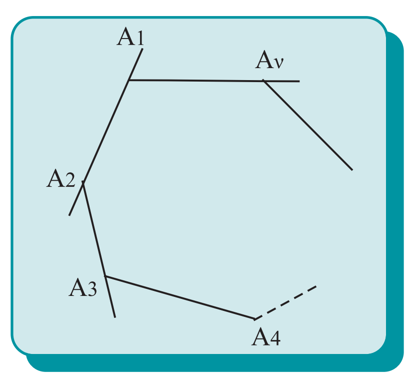
ΠΟΡΙΣΜΑ

Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών κυρτού ν - γώνου είναι 4 ορθές.

Απόδειξη

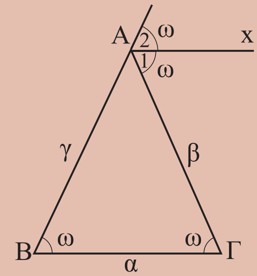
Έχουμε $\left\{\begin{array}{l} \hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_1 = 2\llcorner \\ \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \hat{A}_2 = 2\llcorner \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots = \ldots\ldots \\ \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} + \hat{A}_\nu = 2\llcorner \end{array}\right.$ προσθέτουμε κατά μέλη οπότε:

$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \ldots + \hat{A}_\nu) = 2\nu\llcorner$ ή
$(\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi}) + (2\nu - 4)\llcorner = 2\nu\llcorner$ ή
$\hat{A}_{1\varepsilon\xi} + \hat{A}_{2\varepsilon\xi} + \ldots + \hat{A}_{\nu\varepsilon\xi} = 4\llcorner$.



Σχήμα 24

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η



Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και τη διχοτόμο Αx της εξωτερικής γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο είναι ισοσκελές , αν και μόνο αν Αx//ΒΓ.

Απόδειξη

(i) Αν β=γ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = \omega$.

Όμως $\hat{A}_{\varepsilon\xi} = \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\omega$, οπότε $\frac{\hat{A}_{\varepsilon\xi}}{2} = \omega$ ή $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma} = \omega$. Άρα Αx//ΒΓ, αφού σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες.

(ii) Αν Αx//ΒΓ τότε $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ (ως εντός εναλλάξ) και $\hat{A}_2 = \hat{B}$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη). Άρα $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), οπότε β=γ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

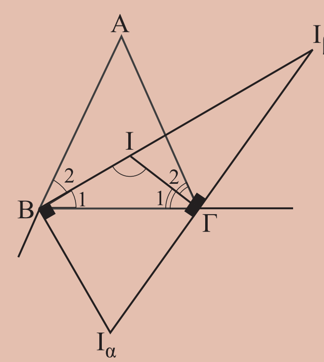
Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Να αποδειχθεί ότι

(i) Η γωνία των δύο εσωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90° + \frac{\hat{A}}{2}$.

(ii) Η γωνία μίας εσωτερικής και μίας εξωτερικής διχοτόμου είναι ίση με $\frac{\hat{A}}{2}$.

(iii) Η γωνία των δύο εξωτερικών διχοτόμων είναι ίση με $90° - \frac{\hat{A}}{2}$.

Απόδειξη



Οι εσωτερικές διχοτόμοι τέμνονται στο έγκεντρο Ι. Οι εξωτερικές διχοτόμοι των εξωτερικών γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_α και η εσωτερική διχοτόμος της $\hat{B}$ με την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο παράκεντρο I_β.

(i) Από το τρίγωνο ΒΙΓ παίρνουμε:

$B\hat{I}\Gamma + \hat{B}_1 + \hat{\Gamma}_1 = 180°$ ή $B\hat{I}\Gamma = 180° - \hat{B}_1 - \hat{\Gamma}_1$ ή

$B\hat{I}\Gamma = 180° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή $B\hat{I}\Gamma = 90° + 90° - \frac{\hat{B}}{2} - \frac{\hat{\Gamma}}{2}$ ή

$\mathbf{B\hat{I}\Gamma = 90° + \frac{\hat{A}}{2}}$ (επειδή $\frac{\hat{A}}{2} + \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} = 90°$). (1)

(ii) Η εσωτερική και εξωτερική διχοτόμος μιας γωνίας τέμνονται **κάθετα**. Έτσι στο τρίγωνο $I\Gamma I_\beta$ είναι: $\hat{\Gamma} = 90°$ και $B\hat{I}\Gamma = 90° + \hat{I}_\beta$ (2) (ως εξωτερική γωνία).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\beta = \frac{\hat{A}}{2}}$. (3)

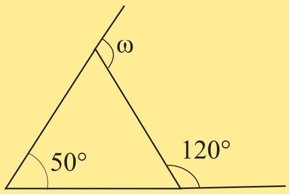
(iii) Όμοια στο τρίγωνο $I_\alpha B I_\beta$ είναι $\hat{B} = 90°$, οπότε $\hat{I}_\alpha + \hat{I}_\beta = 90°$ ή $\hat{I}_\alpha = 90° - \hat{I}_\beta$. (4)

Από τις (3) και (4) προκύπτει ότι $\mathbf{\hat{I}_\alpha = 90° - \frac{\hat{A}}{2}}$.

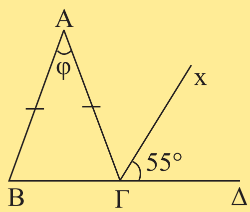
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Να υπολογίσετε τη γωνία ω στο παρακάτω σχήμα.*



2. *Αν ΑΒ = ΑΓ και Γx διχοτόμος της $\text{Α}\hat{\Gamma}\Delta$, να υπολογίσετε τη γωνία φ (βλ. σχήμα).*



3. *Υπάρχει κυρτό ν-γωνο τέτοιο, ώστε το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών του να ισούται με το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών του;*

4. *Να εξηγήσετε γιατί αν ένα ισοσκελές τρίγωνο έχει μια γωνία 60° είναι ισόπλευρο.*

5. *Το άθροισμα των εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι:*

α) 180° β) 270° γ) 360° δ) 540°

ε) κανένα από τα παραπάνω

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

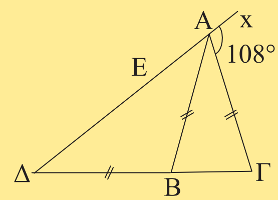
1. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο μια γωνία του είναι ίση με τα $\frac{2}{3}$ μιας άλλης γωνίας του. Να υπολογισθούν όλες οι γωνίες του (δύο περιπτώσεις).*

2. *Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι $\hat{A} = \frac{\hat{B}}{2}$. Αν Ι το έγκεντρο του τριγώνου να υπολογισθεί η γωνία $\text{Β}\hat{\text{Ι}}\Gamma$. (Εφαρμογή 2 – § 4.8)*

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $\hat{A}$ είναι τριπλάσια της γωνίας $\hat{B}$. Αν $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 144°$ να βρεθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις πλευρές του.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) και το ύψος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι $\hat{B} = \Delta\hat{A}\Gamma$ και $\hat{\Gamma} = \Delta\hat{A}\text{Β}$.*

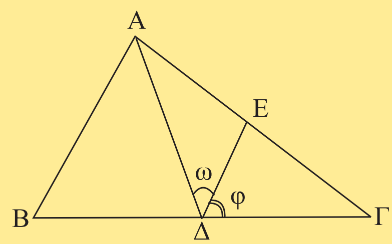
5. *Στο παρακάτω σχήμα είναι:*



ΑΒ = ΑΓ = ΔΒ και $x\hat{A}\Gamma = 108°$.

Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{\Delta}$.

6. *Στο παρακάτω σχήμα είναι: $\hat{A} = 90°$, ΑΔ διχοτόμος, ΔΕ//ΑΒ. Αν η γωνία $\hat{B}$ είναι 20° μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$ να υπολογίσετε τις γωνίες ω και φ.*



7. *Το άθροισμα των γωνιών κυρτού πολυγώνου είναι 900°. Να βρεθεί το πλήθος των πλευρών του.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $\hat{B}_{\varepsilon\xi} = 90° + \frac{\hat{A}}{2}$. Να αποδείξετε ότι ΑΒ = ΑΓ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Να αποδείξετε ότι*

i) $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma - \text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = \hat{B} - \hat{\Gamma}$,

ii) $\text{Α}\hat{\Delta}\text{Β} = 90° - \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$, $\text{Α}\hat{\Delta}\Gamma = 90° + \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$ φέρουμε το ύψος ΑΔ και τη διχοτόμο ΑΕ. Να αποδείξετε ότι $\Delta\hat{A}\text{Ε} = \frac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.*

4. *Αν οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{A}$, $\hat{B}$ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ τέμνονται σε σημείο Ε, να αποδείξετε ότι $\text{Α}\hat{\text{Ε}}\text{Β} = \frac{\hat{\Gamma}+\hat{\Delta}}{2}$.*

5. *Από τυχαίο σημείο Δ της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε τη ΔΕ⊥ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \text{Ε}\hat{\Delta}\Gamma$.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$) το ύψος του ΑΔ και η διχοτόμος του ΒΖ τέμνονται σε σημείο Ε. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΖ είναι ισοσκελές.*

7. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$). Η διχοτόμος της γωνίας $\hat{B}$ τέμνει την ΑΓ στο Ζ και την κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ, στο Η. Να αποδείξετε ότι ΖΓ = ΓΗ.*

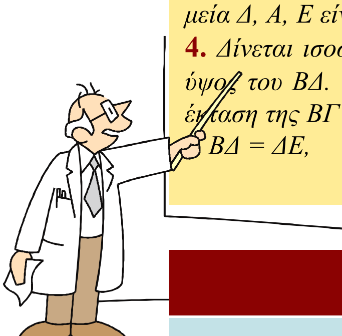
Σύνθετα Θέματα

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Στην προέκταση της ΓΑ προς το Α, παίρνουμε τμήμα ΑΕ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ⊥ΒΓ.*

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}>\hat{\Gamma}$ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ευθεία κάθετη στην ΑΔ, που τέμνει την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι* $E\hat{B}\Gamma=\dfrac{\hat{B}-\hat{\Gamma}}{2}$.

3. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε την υποτείνουσα ΓΒ κατά τμήμα ΒΔ = ΑΒ. Φέρουμε κάθετη στη ΒΓ στο σημείο Γ και παίρνουμε σε αυτή -προς το μέρος του Α- τμήμα ΓΕ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Δ, Α, Ε είναι συνευθειακά.*

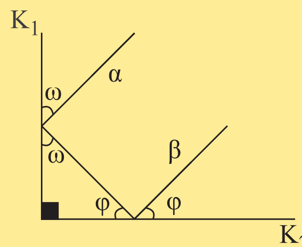
4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και το ύψος του ΒΔ. Φέρουμε ΔΗ⊥ΑΒ, που τέμνει την προέκταση της ΒΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι:*
i) ΒΔ = ΔΕ,   ii) ΒΓ > ΓΕ.



5. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ, προεκτείνουμε τα ύψη του ΒΔ και ΓΕ, προς το μέρος των κορυφών και επί των προεκτάσεων παίρνουμε τμήματα ΒΖ=ΑΓ και ΓΗ=ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι*
i) ΑΖ=ΑΗ,   ii) ΑΖ⊥ΑΗ.

6. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}>\hat{\Gamma}$ και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Delta}$. Να αποδείξετε ότι* $\varphi=\dfrac{\hat{A}-\hat{\Gamma}}{2}$.

7. *Δύο επίπεδα κάτοπτρα K_1,K_2 είναι κάθετα. Φωτεινή ακτίνα α προσπίπτει αρχικά στο K_1 και μετά την ανάκλαση στο K_2, εξέρχεται κατά την ακτίνα β. Τι πορεία θα ακολουθήσει, σε σχέση με την αρχική ακτίνα α;*



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A}=60°$ και οι διχοτόμοι του ΒΔ και ΓΕ. Να αποδείξετε ότι $B\hat{\Delta}\Gamma=\Gamma\hat{E}A$.*

2. *Θεωρούμε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ = ΒΓ= α) και τα σημεία Δ και Ε των πλευρών του ΑΒ και ΒΓ αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΒΕ = $\frac{1}{3}$α. Να αποδείξετε ότι ΔΕ⊥ΒΓ.*

3. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=90°$) και η διχοτόμος του ΑΔ. Φέρουμε Δx⊥ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ε και την προέκτασή της ΑΓ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ=ΖΓ.*

4. *Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ με $\hat{A}=\hat{\Gamma}=90°$ και ΒΓ=ΓΔ. Στην προέκταση της ΑΔ παίρνουμε τμήμα ΔΕ=ΑΒ. Να αποδείξετε ότι ΑΓ⊥ΓΕ.*

5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ. Να αποδείξετε ότι:*

i) Το ύψος ΑΔ = υ_α σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μικρότερη γωνία.

ii) Η διάμεσος ΑΜ = μ_α σχηματίζει με τη μικρότερη πλευρά μεγαλύτερη γωνία.

iii) Το ύψος υ_α και η διάμεσος μ_α βρίσκονται εκατέρωθεν της διχοτόμου ΑΕ = δ_α.

6. *Τρεις κύκλοι με κέντρα K_1,K_2,K_3 εφάπτονται εξωτερικά στα Α,Β,Γ. Να αποδείξετε ότι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ είναι εγγεγραμμένος στο τρίγωνο $K_1K_2K_3$.*

7. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, τον εγγεγραμμένο κύκλο του (Ι,ρ) και τον παρεγγεγραμμένο κύκλο του (I_α,ρ_α). Ονομάζουμε Δ,Ε,Ζ και Δ΄,Ε΄,Ζ΄ τα σημεία επαφής των (Ι,ρ) και (I_α,ρ_α) με τις ευθείες ΒΓ,ΓΑ,ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΖ=ΑΕ=τ – α, ΒΔ=ΒΖ=τ – β, ΓΔ=ΓΕ=τ – γ,
ii) ΑΖ΄=ΑΕ΄= τ,
iii) ΖΖ΄=ΕΕ΄=α , ΔΔ΄= β – γ.