

4. Εξισώσεις και προβλήματα



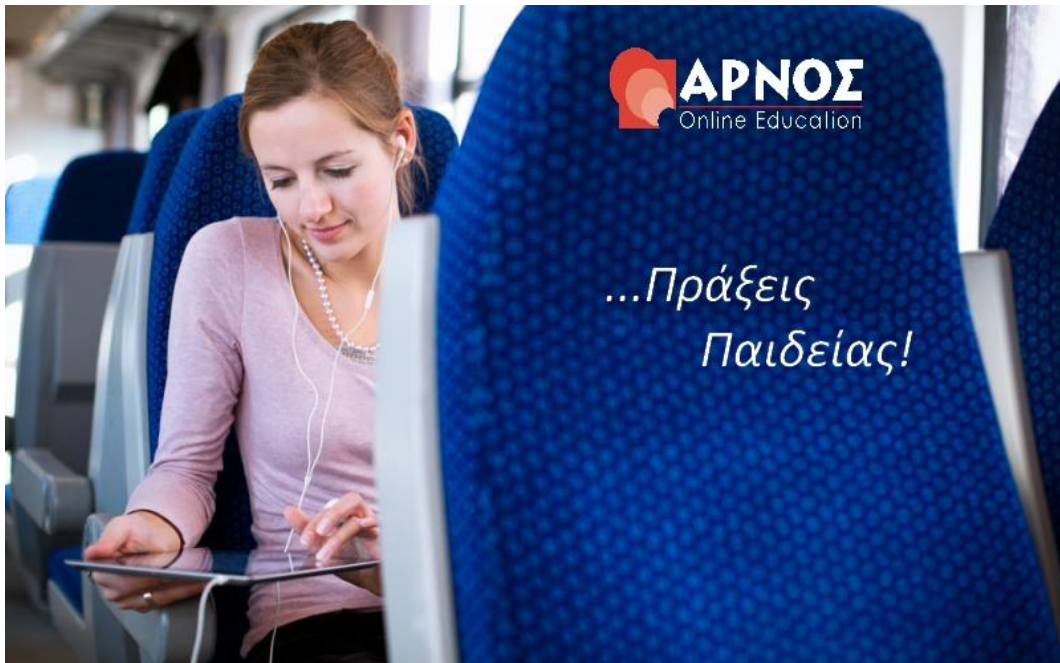
Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Α' Γυμνασίου

4.2 – 4.3 Επίλυση προβλημάτων - Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

σχ. βιβλίο (σ. 78)

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!



Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις



Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.



Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Α' Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σ. 78)

4.2 – 4.3 Επίλυση προβλημάτων - Παραδείγματα επίλυσης προβλημάτων

Άσκηση 1

Να βρεις έναν αριθμό που έχει τέσσερα ίδια ψηφία και διαιρείται με το 9.

Λύση

Έστω ότι x είναι ένα από τα ίσα ψηφία τότε ο ζητούμενος αριθμός θα έχει τη μορφή: $xxxx$. Για να διαιρείται με το 9, πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να είναι πολλαπλάσιο του 9. Δηλαδή το άθροισμα $x + x + x + x$, ή αλλιώς το $4x$ να διαιρείται με το 9. Αυτό συμβαίνει μόνο για την περίπτωση όπου $x = 9$
Οπότε, ο αριθμός μας είναι ο: 9.999

Άσκηση 2

Πόσοι μαθητές είναι τα $\frac{7}{10}$ των μαθητών ενός σχολείου, αν τα $\frac{2}{8}$ των μαθητών, αυτού του σχολείου, είναι 60 μαθητές;

Λύση

Έστω ότι x είναι το πλήθος των μαθητών του σχολείου.

➤ Γνωρίζοντας ότι τα $\frac{2}{8}$ των μαθητών του σχολείου, είναι 60 μαθητές,

καταλήγουμε στην εξίσωση: $\frac{2}{8} \cdot x = 60$, οπότε:

$$x = 60 : \frac{2}{8} = 60 \cdot \frac{8}{2} = \frac{60 \cdot 8}{2} = \frac{480}{2} = 480 : 2 = 240 \text{ μαθητές έχει το σχολείο.}$$

➤ Συνεπώς, τα $\frac{7}{10}$ των μαθητών του σχολείου, ισούνται με:

$$\frac{7}{10} \cdot 240 = \frac{7 \cdot 240}{10} = \frac{1.680}{10} = 1.680 : 10 = 168 \text{ μαθητές.}$$

Άσκηση 3

Να βρεις τρεις διαδοχικούς φυσικούς αριθμούς που έχουν άθροισμα 1533.

Λύση

Ορίζουμε ως x το μικρότερο από τους τρεις ζητούμενους φυσικούς αριθμούς.

Τότε, οι άλλοι δύο αριθμοί είναι οι: $x + 1$, $x + 2$.

Εφόσον γνωρίζουμε ότι το άθροισμα τους, ισούται με 1.533, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση: $x + (x + 1) + (x + 2) = 1533$ άρα:

$$3x + 3 = 1533 \quad \text{ή} \quad 3x = 1533 - 3 \quad \text{ή} \quad 3x = 1530$$

Οπότε: $x = 1530 : 3 = 510$

Συνεπώς, οι ζητούμενοι αριθμοί, τους οποίους είχαμε θέσει σημειολογικά ως:

x , $x + 1$, $x + 2$, είναι πλέον οι: 510 , 510 + 1 , 510 + 2, είναι δηλαδή οι αριθμοί:

510, 511, 512.

Άσκηση 4

Βρες το ψηφίο που λείπει από τον αριθμό $75\square 3$, ώστε αυτός να διαιρείται με το 9.

Λύση

Ορίζουμε καταρχήν ως x το ψηφίο που λείπει από τον αριθμό μας.

Για να διαιρείται ο αριθμός αυτός με το 9 θα πρέπει το άθροισμα των ψηφίων του να είναι πολλαπλάσιο του 9.

Δηλαδή πρέπει το άθροισμα $(7 + 5 + x + 3)$ να είναι πολλαπλάσιο του 9.

Ισοδύναμα, πρέπει το $(x + 15)$ να είναι πολλαπλάσιο του 9.

- Ανακαλώντας στη μνήμη μας την προπαίδεια του αριθμού 9, ο αμέσως επόμενος αριθμός του 15 που είναι πολλαπλάσιο του 9, είναι ο αριθμός 18.
- Δηλαδή, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι: $x + 15 = 18$, άρα: $x = 18 - 15$, οπότε:
 $x = 3$.

Κατά συνέπεια, το ψηφίο που λείπει από τον αριθμό $75\square3$, είναι ο αριθμός 3.

Οπότε ο αριθμός μας είναι ο: 7.533

Άσκηση 5

Σε ένα διαγώνισμα, κάθε μαθητής πρέπει να απαντήσει σε 100 ερωτήσεις.

Θα πάρει 3 μονάδες, για κάθε σωστή απάντηση και μόνο μία 1 μονάδα, για κάθε λανθασμένη. Ένας μαθητής πήρε συνολικά 220 μονάδες.

Σε πόσες ερωτήσεις απάντησε σωστά ;

Λύση

Έστω ότι x είναι το πλήθος των σωστών απαντήσεων, οπότε το πλήθος των λανθασμένων απαντήσεων ισούται με: $100 - x$.

- Οπότε, η συνολική βαθμολογία του μαθητή, είναι: $3x + 100 - x$.
- Γνωρίζουμε ότι ο μαθητής πήρε συνολικά 220 μονάδες, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση: $3x + 100 - x = 220$, δηλαδή: $2x + 100 = 220$ ή $2x = 220 - 100$ ή
 $2x = 120$ οπότε: $x = 120 : 2 = 60$

Συνεπώς, ο μαθητής απάντησε σωστά σε 60 ερωτήσεις.

Άσκηση 6

Η διαφορά της ηλικίας της κόρης από τη μητέρα της είναι 25 χρόνια. Αν η κόρη είναι 18 ετών, πόσο ετών είναι η μητέρα ;

Λύση

Συμβολίζουμε την ηλικία της μητέρας, με x έτη. Σύμφωνα με τα δεδομένα της Άσκησης μας, η κόρη είναι κατά 25 χρόνια μικρότερη από τη μητέρα της, δηλαδή η ηλικία της κόρης είναι: $(x - 25)$ έτη.

Αφού η κόρη είναι 18 ετών, οπότε καταλήγουμε στην εξίσωση: $x - 25 = 18$, οπότε:
 $x = 18 + 25 = 43$ ετών, δηλαδή η μητέρα είναι 43 ετών.

Άσκηση 7

Τρία αδέρφια μοιράζονται εξίσου μια κληρονομιά, που είναι ένα χωράφι και ένα διαμέρισμα. Ο πρώτος παίρνει το χωράφι. Ο δεύτερος παίρνει το διαμέρισμα, αλλά δίνει στον πρώτο 600 € και στον τρίτο 15.000€. Ποια ήταν η αξία του χωραφιού και ποια του διαμερίσματος;

Λύση

Ορίζουμε ως x την αξία του χωραφιού και ως y την αξία του διαμερίσματος. Καταρχήν, θα εκφράσουμε με τη βοήθεια των x και y , τα μερίδια που πήρε καθένας αδελφός:

- Ο πρώτος αδελφός πήρε μερίδιο: $(600 + x)$ €
- Ο δεύτερος αδελφός πήρε μερίδιο: $(y - 600 - 15.000)$ €
- Ο τρίτος αδελφός πήρε μερίδιο: 15.000 €

Γνωρίζουμε ότι τα αδέλφια μοιράζονται εξίσου την κληρονομιά, οπότε τα 3 μερίδια είναι μεταξύ τους, ίσα.

➤ **Μερίδιο 1^{ου} αδελφού = Μερίδιο 3^{ου} αδελφού**

Θα ισχύει επομένως, ότι: $600 + x = 15.000$, οπότε: $x = 15000 - 600$, άρα:

$$x = 14.400$$

Συνεπώς, η αξία του χωραφιού είναι ίση με: 14.400 €.

➤ **Μερίδιο 2^{ου} αδελφού = Μερίδιο 3^{ου} αδελφού**

Θα ισχύει επομένως, ότι: $y - 600 - 15000 = 15000$, οπότε: $y - 15600 = 15000$, άρα:

$$y = 15000 + 15600 = 30.600$$

Συνεπώς, η αξία του διαμερίσματος είναι ίση με: 30.600 €.

Άσκηση 8

Σε κάθε μία από τις πράξεις (α) και (β) τα γράμματα αντιστοιχούν σε διαφορετικά μεταξύ τους ψηφία.

Αντικατέστησε τα γράμματα Α, Β, Γ, και Δ με τα κατάλληλα ψηφία.

$$\begin{array}{r} \text{(α)} \quad AB \\ + 47 \\ \hline 73 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{(β)} \quad ΓΔ \\ - 8 \\ \hline Δ5 \end{array}$$

Λύση

➤ Γνωρίζουμε ότι: $AB + 47 = 73$, οπότε λύνοντας την εξίσωση, θα βρούμε τον άγνωστο ΑΒ. Έχουμε λοιπόν: $AB + 47 = 73$, άρα: $AB = 73 - 47$, οπότε: $AB = 26$, δηλαδή **Α = 2** και **Β = 6**.

- Γνωρίζουμε ότι: $\Gamma\Delta - 8 = \Delta 5$, οπότε ομοίως με πριν, λύνοντας την εξίσωση, θα βρούμε την εξίσωση, θα βρούμε τον άγνωστο $\Gamma\Delta$.

Έχουμε λοιπόν: $\Gamma\Delta - 8 = \Delta 5$, άρα: $\Gamma\Delta = \Delta 5 + 8$, οπότε:

$$\Gamma\Delta = \Delta + 8 + 5, \text{ άρα:}$$

$$\Gamma\Delta = \Delta + 13$$

$$\Gamma\Delta = (\Delta + 1)3$$

Συνεπώς, πρέπει: $\Gamma = \Delta + 1$ και $\Delta = 3$. Άρα, για $\Delta = 3$, τότε: $\Gamma = \Delta + 1 = 3 + 1 = 4$,
άρα: $\Gamma = 4$.

Άσκηση 9

Αν από μία ποσότητα κρασιού, αφαιρέσουμε 18 lt, χωράει σε δοχεία των 7 lt .

Αν γνωρίζεις ότι η ποσότητα είναι μικρότερη των 100 lt και μεγαλύτερη των 90 lt , πόσα lt είναι η αρχική ποσότητα του κρασιού;

Πόσα δοχεία θα χρησιμοποιήσουμε ;

Λύση

Ορίζουμε ως x την ποσότητα του κρασιού.

- Αφαιρώντας 18 lt η ποσότητα γίνεται ίση με: $(x - 18)$ lt. Γνωρίζουμε ότι αυτή η ποσότητα χωράει σε δοχεία των 7 lt, οπότε θα είναι πολλαπλάσιο του 7.

Δηλαδή: $x - 18 = \text{πολλαπλάσιο του } 7$.

- Επίσης, γνωρίζουμε ότι: $90 < x < 100$ άρα: $90 - 18 < x - 18 < 100 - 18$, οπότε:

$$72 < x - 18 < 82$$

Αναζητούμε συνεπώς ένα πολλαπλάσιο του 7, ανάμεσα στους αριθμούς 72 και 82. Είναι ο αριθμός 77.

- Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι: $x - 18 = 77$, οπότε: $x = 77 + 18 = 95$

Δηλαδή, η συνολική ποσότητα του κρασιού που θα χωρέσουμε σε δοχεία των 7 lt, είναι ίση με 95 lt.

Συνεπώς, θα χρησιμοποιήσουμε: $77 : 7 = 11$ δοχεία.

Άσκηση 10

Ένας παραγωγός έφτιαξε 100 lt ξύδι και θέλει να το συσκευάσει σε μπουκάλια που χωράνε 0,75 lt. Να βρεις:

(α) Πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί. (β) Πόσα lt θα του περισσέψουν.

Λύση

Για να υπολογίσουμε πόσα μπουκάλια θα χρειαστεί ο παραγωγός, θα κάνουμε τη διαίρεση: $100 : 0,75$

100	0,75
10000	75
250	133
250	
25	

(α) Το πηλίκο της διαίρεσης είναι ίσο με 133, οπότε ο παραγωγός θα χρειαστεί: 133 μπουκάλια

(β) Ο διαιρέτης της προηγούμενης διαίρεσης ισούται με 0,75, επομένως θα συσκευαστούν: $0,75 \cdot 133 = 99,75$ lt

Άρα, θα περισσέψουν: $100 - 99,75 = 0,25$ lt

Άσκηση 11

Δύο συνεργεία καθαρισμού ακτών καθαρίζουν μία μεγάλη παραλία μήκους $18\frac{3}{4}$

km. Το πρώτο συνεργείο καθαρίζει $3\frac{1}{2}$ km και το δεύτερο $2\frac{3}{4}$ km κάθε μέρα.

Τα δύο συνεργεία εργάζονται, στα δύο άκρα της παραλίας, έως ότου συναντηθούν. Σε πόσες ημέρες θα έχουν ολοκληρώσει τον καθαρισμό της παραλίας;

Λύση

Καταρχήν, θα υπολογίσουμε το τμήμα του μήκους της παραλίας (σε km) που καθαρίζει το κάθε συνεργείο, ανά ημέρα.

➤ Το πρώτο συνεργείο καθαρίζει:

$$3\frac{1}{2} = 3 + \frac{1}{2} = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2} = \frac{6}{2} + \frac{1}{2} = \frac{6+1}{2} = \frac{7}{2} \text{ km την ημέρα.}$$

➤ Το δεύτερο συνεργείο καθαρίζει:

$$2\frac{3}{4} = 2 + \frac{3}{4} = \frac{2 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4} = \frac{8}{4} + \frac{3}{4} = \frac{8+3}{4} = \frac{11}{4} \text{ km την ημέρα.}$$

Έστω ότι ο καθαρισμός διαρκεί x ημέρες, τότε το πρώτο συνεργείο θα έχει καθαρίσει $\left(\frac{7}{2} \cdot x\right)$ km και το δεύτερο $\left(\frac{11}{4} \cdot x\right)$ km, δηλαδή θα έχουν καθαρίσει

$$\begin{aligned} \text{συνολικά: } \frac{7}{2} \cdot x + \frac{11}{4} \cdot x &= \frac{7 \cdot x}{2} + \frac{11 \cdot x}{4} = \frac{7 \cdot x \cdot 2}{2 \cdot 2} + \frac{11 \cdot x}{4} = \\ &= \frac{14 \cdot x}{4} + \frac{11 \cdot x}{4} = \frac{14 \cdot x + 11 \cdot x}{4} = \frac{(14+11) \cdot x}{4} = \\ &= \frac{25 \cdot x}{4} \text{ km} \end{aligned}$$

➤ Καταλήγουμε λοιπόν στην εξίσωση: $\frac{25 \cdot x}{4} = 18\frac{3}{4}$, η οποία γράφεται ισοδύναμα:

$$\frac{25 \cdot x}{4} = 18 + \frac{3}{4}, \quad \text{άρα: } \frac{25 \cdot x}{4} = \frac{18}{1} + \frac{3}{4}, \quad \text{οπότε:}$$

$$\frac{25 \cdot x}{4} = \frac{18 \cdot 4}{1 \cdot 4} + \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{25 \cdot x}{4} = \frac{72}{4} + \frac{3}{4} \quad \text{ή} \quad \frac{25 \cdot x}{4} = \frac{75}{4} \quad \text{ή} \quad 25 \cdot x = 75$$

Οπότε: $x = 75 : 25 = 3$, δηλαδή σε 3 ημέρες τα δύο συνεργεία θα έχουν ολοκληρώσει τον καθαρισμό της παραλίας.

Άσκηση 12

Ένα υπάλληλος αποταμιεύει κάθε μήνα το $\frac{1}{15}$ του μισθού του. Αν αυξηθεί κατά το $\frac{1}{5}$ ο μισθός του, ποιο μέρος του νέου του μισθού πρέπει να αποταμιεύει, ώστε να μην αυξηθεί το ποσό που αποταμιεύει κάθε μήνα;

Λύση

Έστω ότι x είναι ο μισθός του υπαλλήλου, αρχικά.

➤ Γνωρίζουμε ότι ο υπάλληλος αποταμιεύει το $\frac{1}{15}$ του μισθού του, δηλαδή το ποσό που αποταμιεύει ισούται με: $\frac{1}{15} \cdot x$, δηλαδή $\frac{x}{15}$.

➤ Αν αυξηθεί ο μισθός του υπαλλήλου, κατά το $\frac{1}{5}$, τότε θα γίνει ίσος με:

$$x + \frac{1}{5} \cdot x = x + \frac{1 \cdot x}{5} = x + \frac{x}{5} = \frac{5 \cdot x}{5} + \frac{x}{5} = \frac{5 \cdot x + x}{5} = \frac{6 \cdot x}{5}$$

➤ Έστω μ το μέρος του νέου μισθού που αποταμιεύει ο υπάλληλος.

Αυτό το ποσό ισούται με: $\mu \cdot \frac{6 \cdot x}{5}$

Το ποσό που αποταμιεύει κάθε μήνα ο υπάλληλος γνωρίζουμε ότι δεν αλλάζει:

$$\text{ΠΟΣΟ ΑΠΟΤΑΜ. ΜΕΤΑ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ} = \text{ΠΟΣΟ ΑΠΟΤΑΜ. ΠΡΙΝ ΤΗΝ ΑΥΞΗΣΗ}$$

Συνεπώς, καταλήγουμε στην εξίσωση: $\mu \cdot \frac{6 \cdot x}{5} = \frac{x}{15}$, οπότε λύνοντας την εξίσωση,

θα υπολογίσουμε την τιμή του αγνώστου x , οπότε και το μέρος μ του νέου ποσού που πρέπει να αποταμιεύει ο υπάλληλος.

Έχουμε λοιπόν: $\mu \cdot \frac{6 \cdot x}{5} = \frac{x}{15}$, οπότε λύνοντας την εξίσωση προκύπτει ότι:

$$\mu = \frac{x}{15} : \frac{6 \cdot x}{5} = \frac{x}{15} \cdot \frac{5}{6 \cdot x} = \frac{x \cdot 5}{15 \cdot 6 \cdot x} = \frac{\cancel{x} \cdot 5}{90 \cdot \cancel{x}} = \frac{5}{90} = \frac{5:5}{90:5} = \frac{1}{18}$$

Δηλαδή, ο υπάλληλος πρέπει να αποταμιεύει το $\frac{1}{18}$ του νέου του μισθού.

Άσκηση 13

Αυτή την χρονιά η ηλικία ενός ανθρώπου είναι πολλαπλάσιο του 7 και την επόμενη χρονιά είναι πολλαπλάσιο του 9. Αν γνωρίζουμε ότι δεν είναι αιωνόβιος ποια είναι η ηλικία του;

Λύση

Ορίζουμε ως x την ηλικία που έχει σήμερα ο συγκεκριμένος άνθρωπος.

- Αφού είναι αριθμός πολλαπλάσιο του 7, θα γράφεται λοιπόν στη μορφή:
 $x = 7 \cdot \alpha$, όπου α φυσικός αριθμός.
- Ο συγκεκριμένος άνθρωπος δεν είναι αιωνόβιος, οπότε η ηλικία του, x , θα είναι κάτω από 100 έτη, άρα: $x < 100$.
- Την επόμενη χρονιά ο άνθρωπος θα έχει ηλικία $(x + 1)$ έτη. Γνωρίζουμε ότι η συγκεκριμένη ηλικία είναι πολλαπλάσιο του 9, οπότε: $x + 1 = 9 \cdot \beta$, όπου β φυσικός αριθμός.

Συνεπώς από τις δύο παραπάνω σχέσεις, προκύπτει ότι: $7 \cdot \alpha + 1 = 9 \cdot \beta$, οπότε ο αριθμός $(7 \cdot \alpha + 1)$ είναι πολλαπλάσιο του 9.

Όπως επισημάνσαμε και παραπάνω, ισχύει επίσης ότι: $7 \cdot \alpha + 1 < 100$

Τα πολλαπλάσια του 9 που είναι μικρότερα του 100, είναι τα:

9, 18, 27, **36**, 45, 54, 63, 72, 81, 90, **99**

Τα πολλαπλάσια του 7 που είναι μικρότερα του 100, είναι τα:

7, 14, 21, 28, **35**, 42, 49, 56, 63, 70, 77, 84, 91, **98**

Οπότε επιλέγουμε τους φυσικούς αριθμούς α με τέτοιο τρόπο, ώστε:

$$(\text{πολλαπλάσια του } 7) + 1 = (\text{πολλαπλάσια του } 9)$$

Αυτό συμβαίνει για τα πολλαπλάσια του 7 που είναι οι αριθμοί 35 και 98.

Οπότε:

$$7 \cdot \alpha + 1 = 36, \text{ άρα: } 7 \cdot \alpha = 36 - 1, \text{ οπότε: } 7 \cdot \alpha = 35, \text{ άρα: } \mathbf{x = 35}$$

$$7 \cdot \alpha + 1 = 99, \text{ άρα: } 7 \cdot \alpha = 99 - 1, \text{ οπότε: } 7 \cdot \alpha = 98, \text{ άρα: } \mathbf{x = 98}$$

Άρα σήμερα ο άνθρωπος θα είναι 35 ετών (οπότε σε ένα χρόνο θα είναι 36 ετών) ή 98 ετών (οπότε σε ένα χρόνο θα είναι 99 ετών, αντίστοιχα).

Επιμέλεια: Βασίλης Τσιλιβής – Μαθηματικός



...Πράξεις Παιδείας!