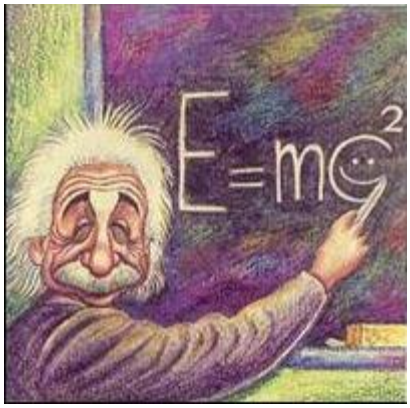
4. Εξισώσεις και προβλήματα



Λύσεις ασκήσεων Μαθηματικών Α' Γυμνασίου

4.1 Η έννοια της εξίσωσης

Οι εξισώσεις: α + x = β, x – α = β,

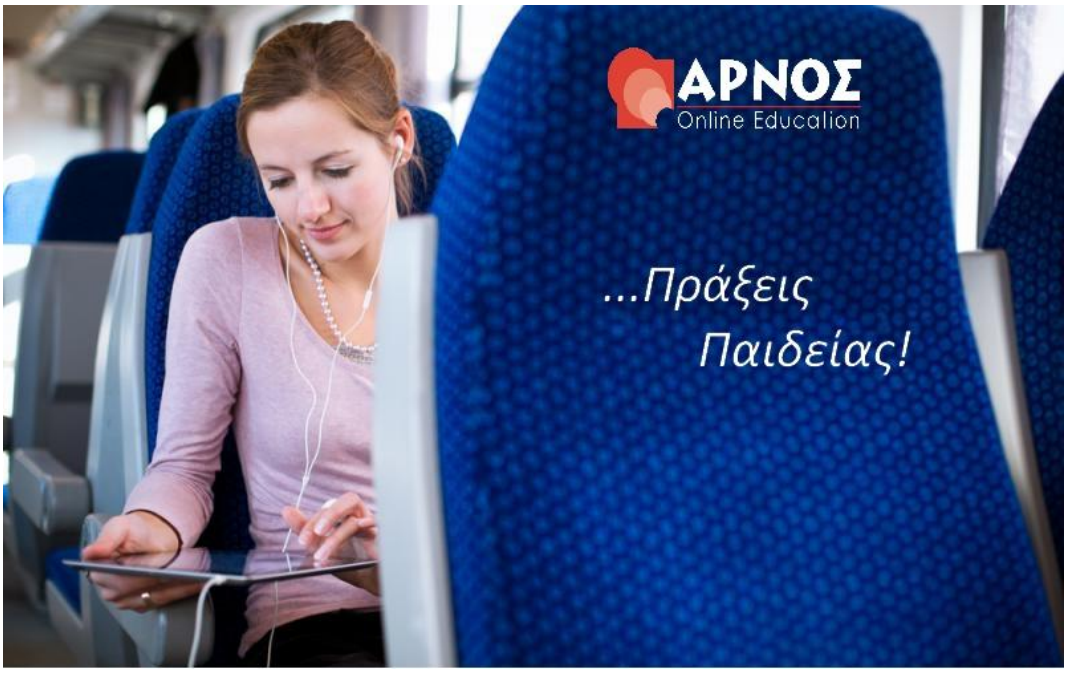
α – x = β, αx = β, α:x = β και x:α = β

σχ. βιβλίο (σ. 72)

ΑΡΝΟΣ
Online Education

Φροντιστηριακό e-μάθημα

Γυμνάσιο: 9.000 μαθήματα με βίντεο-διδασκαλία



Μελέτη όπου, όποτε και όσο εσύ θες!

Διδάσκουμε μεθοδικά σε βίντεο τη θεωρία του σχολικού βιβλίου και λύνουμε όλες τις ασκήσεις

Δημιουργούμε συνεχώς νέα βίντεο με διδασκαλία για τις εκπαιδευτικές σου απαιτήσεις

Παίζουμε και μαθαίνουμε με on line test αξιολόγησης & SOS διαγωνίσματα προσομοίωσης για τις εξετάσεις

Λύνουμε απορίες ζωντανά on line καθημερινά 3 μ.μ. - 8 μ.μ.

Λύσεις Ασκήσεων Μαθηματικών Α΄ Γυμνασίου σχ. βιβλίου (σ. 72)

4.1 Η έννοια της εξίσωσης

Οι εξισώσεις: α + x = β, x – α = β, α – x = β, αx = β, α:x = β και x:α = β

Άσκηση 1

Αντιστοίχισε τις προτάσεις των γραμμών του πρώτου πίνακα με τις εκφράσεις αριθμών και γραμμάτων των γραμμών στο δεύτερο πίνακα.

το τριπλάσιο ενός αριθμού	$x-y > 20$
το δεκαπλάσιο ενός αριθμού	$x \cdot y=32$
ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12	$3 \cdot x$
ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5	$x+12$
η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20	$10 \cdot x$
το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32	$x-5$

Λύση

Οι προτάσεις των γραμμών του πρώτου πίνακα, αντιστοιχίζονται με τις εκφράσεις αριθμών και γραμμάτων των γραμμών στο δεύτερο πίνακα, ως εξής:

το τριπλάσιο ενός αριθμού	$x-y > 20$
το δεκαπλάσιο ενός αριθμού	$x \cdot y=32$
ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12	$3 \cdot x$
ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5	$x+12$
η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20	$10 \cdot x$
το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32	$x-5$

Αιτιολόγηση:

1. «*Το τριπλάσιο ενός αριθμού*»

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό, τότε το τριπλάσιο του συμβολίζεται ως:

$3 \cdot x$

2. «*Το δεκαπλάσιο ενός αριθμού*»

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό, τότε το τριπλάσιο του συμβολίζεται ως:

$10 \cdot x$

3. «*Ένας αριθμός αυξάνεται κατά 12*»

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό, τότε η αύξηση του κατά 12 συμβολίζεται ως: $x + 12$

4. «*Ένας αριθμός ελαττώνεται κατά 5*»

Αν συμβολίσουμε με x τον αριθμό, τότε η ελάττωση του κατά 5 συμβολίζεται ως: $x - 12$

5. «*Η διαφορά δύο αριθμών είναι μεγαλύτερη του 20*»

Αν συμβολίσουμε με x, y τους δύο αριθμούς, τότε η διαφορά τους συμβολίζεται ως $x - y$, η οποία είναι μεγαλύτερη του 20.

Δηλαδή: $x - y > 20$

6. «*Το γινόμενο δύο αριθμών είναι ίσο με 32*»

Αν συμβολίσουμε με x, y τους δύο αριθμούς, τότε το γινόμενο τους συμβολίζεται ως $x \cdot y$, το οποίο ισούται με 32.

Δηλαδή: $x \cdot y = 32$

Άσκηση 2

Διατύπωσε με λόγια τις ακόλουθες μαθηματικές εκφράσεις:

(α) $3\cdot x + 25$ (β) $\frac{1}{2}\cdot x - 7 = 2$ (γ) $\alpha - 2\cdot\beta$ (δ) $4\cdot\kappa + 7\cdot\kappa = 88$

Λύση

Οι παραπάνω μαθηματικές εκφράσεις διατυπώνονται με λόγια, ως εξής:

(α) Το τριπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά 25.

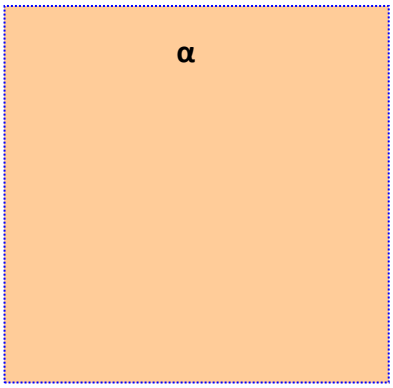
(β) Το μισό ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 7 είναι ίσο με 2.

(γ) Ένας αριθμός μειωμένος κατά το διπλάσιο ενός άλλου αριθμού.

(δ) Το τετραπλάσιο ενός αριθμού αυξημένο κατά το επταπλάσιό του ίδιου αριθμού ισούται με 88.

Άσκηση 3

Η πλευρά ενός τετραγώνου είναι α. Πόση είναι η περίμετρος του και πόσο το εμβαδόν του;



Λύση

- Η Περίμετρος του τετραγώνου ισούται με:

$$Π = α + α + α + α = 4α$$

- Το Εμβαδόν του τετραγώνου ισούται με:

$$E = α\cdot α = α^2$$

Άσκηση 4

Γράψε με απλούστερο τρόπο τις μαθηματικές εκφράσεις:

(α) x + x, (β) α + α + α, (γ) 3·α + 52·α,

(δ) 2·β + β + 3·α + 2·α, (ε) 4·x + 8·x − 3·x, (στ) 7·ω + 4·ω − 10·ω

Λύση

(α) x + x = 2x (β) α + α + α = 3α

(γ) 3·α + 52·α = 55α (δ) 2·β + β + 3·α + 2·α = 3β + 5α

(ε) 4·x + 8·x – 3·x = 9x (στ) 7·ω + 4·ω – 10·ω = ω

Άσκηση 5

Αν x·y = $\frac{2}{9}$ και z = $\frac{3}{5}$, να βρεθεί το x·(y·z).

Λύση

Έχουμε: x·(y·z) = (x·y)·z = $\frac{2}{9}\cdot\frac{3}{5}=\frac{2\cdot 3}{9\cdot 5}=\frac{6}{45}=\frac{6:3}{45:3}=\frac{2}{15}$

Άσκηση 6

Στην εξίσωση **2 + α = x**, το α και το x είναι φυσικοί αριθμοί.

Ποια από τις τιμές 0, 1, 3 μπορεί να πάρει το x;

Λύση

- Από τη δεδομένη εξίσωση, παρατηρούμε ότι το x είναι μεγαλύτερος από τον α κατά 2.
- Άρα, το x πρέπει να είναι αριθμός ίσος ή μεγαλύτερος του 2.

➢ Συνεπώς, ο μοναδικός από τους αριθμούς 0, 1, 3 που ικανοποιεί τη συγκεκριμένη προϋπόθεση, είναι ο αριθμός 3.

Άρα: x = 3.

Άσκηση 7

Να εξετάσεις, αν ο αριθμός 12 είναι λύση της εξίσωσης: x + 13 = 25

Λύση

Για να είναι ο αριθμός 12 λύση της εξίσωσης, πρέπει σύμφωνα με το σχετικό εδάφιο στη σελίδα 73 του Σχολικού βιβλίου, να επαληθεύει τη συγκεκριμένη ισότητα:

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης είναι ο αριθμός που, όταν αντικαταστήσει τον άγνωστο, επαληθεύει την ισότητα.

Λύση ή ρίζα της εξίσωσης
x - 7 = 5 είναι ο αριθμός 12
διότι 12 - 7 = 5
Τη λύση τη γράφουμε: x=12

Οπότε, ο αριθμός 12 είναι λύση, διότι αν όπου x στην εξίσωση μας, αντικαταστήσουμε το 12, τότε: 12 + 13 = 25, γεγονός που ισχύει.

Άσκηση 8

Τοποθέτησε ένα "Χ" στη θέση εκείνη που ο αριθμός επαληθεύει την αντίστοιχη εξίσωση:

	1	2	3	4	5	6	7	8
x – 2 = 4								
1 + y = 4								
18 – ω = 10								
9 – α = 1								
93 – β = 86								

Λύση

Ο παραπάνω πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:

	1	2	3	4	5	6	7	8
x – 2 = 4						X		
1 + y = 4			X					
18 – ω = 10								X
9 – α = 1								X
93 – β = 86							X	

Αιτιολόγηση:

1. Έχουμε την εξίσωση: x – 2 = 4. Μεταξύ των αριθμών 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο αριθμός 6 επαληθεύει την ισότητα μας. Πράγματι, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου x το 6, προκύπτει ότι: 6 – 2 = 4, γεγονός που είναι αληθές. Οπότε: x = 6

2. Έχουμε την εξίσωση: 1 + y = 4. Ομοίως με πριν, μεταξύ των αριθμών 1 έως και 8, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο αριθμός 3 επαληθεύει την ισότητα μας. Πράγματι, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου y το 3, προκύπτει ότι: 1 + 3 = 4, γεγονός που είναι αληθές. Οπότε: y = 3

3. Έχουμε την εξίσωση: 18 - ω = 10. Μεταξύ των αριθμών 1 έως και 8, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο αριθμός 8 επαληθεύει την ισότητα μας. Πράγματι, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου ω το 8, προκύπτει ότι: 18 - 8 = 10, γεγονός που είναι αληθές. Οπότε: ω = 8

4. Έχουμε την εξίσωση: 9 - α = 1. Μεταξύ των αριθμών 1 έως και 8, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο αριθμός 8 επαληθεύει την ισότητα μας. Πράγματι, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου α το 8, προκύπτει ότι: 9 - 8 = 1, γεγονός που είναι αληθές. Οπότε: α = 8

5. Έχουμε την εξίσωση: 93 - β = 86. Ομοίως με τις προηγούμενες εξισώσεις, μεταξύ των αριθμών 1 έως και 8, συμπεραίνουμε ότι μόνο ο αριθμός 7 επαληθεύει την ισότητα μας. Πράγματι, αφού αν αντικαταστήσουμε όπου β το 7, προκύπτει ότι: 93 – 7 = 86, γεγονός που είναι αληθές. Οπότε: β = 7

Άσκηση 9

Ποιος αριθμός επαληθεύει κάθε μία από τις παρακάτω εξισώσεις;

(α) x + 4,9 = 15,83 (β) 40,4 + x = 93, 19

(γ) 53,404 − x = 4,19 (δ) 38 − x = 7,1

Λύση

(α) Θα λύσουμε την εξίσωση: x + 4,9 = 15,83, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό x (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 4,9, να προκύψει άθροισμα ίσο με 15,83.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 15,83 − 4,9 = 10,93

(β) Ομοίως με το (α), θα λύσουμε την εξίσωση: 40,4 + x = 93,19, βρίσκοντας τον άγνωστο x που την ικανοποιεί. Αναζητούμε έναν αριθμό x (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 40,4, να προκύψει άθροισμα ίσο με 93,19.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 93,19 − 40,4 = 52,79

(γ) Θα λύσουμε την εξίσωση: 53,404 - x = 4,19, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε έναν αριθμό x (*αφαιρετέος*), ο οποίος αν αφαιρεθεί από τον αριθμό 53,404 (*μειωτέος*), να προκύψει διαφορά ίση με 4,19.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 53,404 − 4,19 = 49,214

(δ) Θα λύσουμε την εξίσωση: 38 - x = 7,1, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Ομοίως με το (γ), αναζητούμε έναν αριθμό x (*αφαιρετέος*), ο οποίος αν αφαιρεθεί από τον αριθμό 38 (*μειωτέος)*, να προκύψει διαφορά ίση με 7,1.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 38 – 7,1 = 30,9

Άσκηση 10

Ποια είναι η τιμή του x για να ισχύει;

(α) $\frac{3}{x}=\frac{12}{20}$, (β) $\frac{5}{7}=\frac{15}{x}$, (γ) $\frac{35}{40}=\frac{x}{8}$, (δ) $\frac{49}{5}=x+\frac{4}{5}$

Λύση

Τα κλάσματα σε καθένα από τα παραπάνω ερωτήματα, είναι ισοδύναμα μεταξύ τους, οπότε σύμφωνα με τη Σελίδα 38 του Σχολικού βιβλίου, τα «χιαστί γινόμενα» είναι ίσα:

- Αν δύο κλάσματα $\frac{\alpha}{\beta}$ και $\frac{\gamma}{\delta}$ είναι ισοδύναμα τότε τα "χιαστί γινόμενα" $\alpha \cdot \delta$ και $\beta \cdot \gamma$ είναι ίσα.

Δηλαδή: αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ τότε: $\alpha \cdot \delta = \beta \cdot \gamma$

$\frac{2}{3}=\frac{10}{15}$

τότε: $2 \cdot 15 = 3 \cdot 10$

Οπότε, έχουμε αντιστοίχως για την κάθε μία περίπτωση:

(α) $\frac{3}{x}=\frac{12}{20}$, οπότε: $12\cdot x=3\cdot 20$ άρα: 12x = 60 άρα: x = 60 : 12 = 5

(β) $\frac{5}{7}=\frac{15}{x}$, οπότε: $5\cdot x=7\cdot 15$ άρα: 5x = 105 άρα: x = 105 : 5 = 21

(γ) $\frac{35}{40}=\frac{x}{8}$, οπότε: $40\cdot x=8\cdot 35$ άρα: 40x = 280 άρα: x = 280 : 40 = 7

(δ) Έχουμε: $\frac{49}{5}=x+\frac{4}{5}$, οπότε ζητούμε τον άγνωστο x στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό $\frac{4}{5}$, να προκύψει άθροισμα ίσο με $\frac{49}{5}$.

Οπότε: $x=\frac{49}{5}-\frac{4}{5}=\frac{49-4}{5}=\frac{45}{5}=45:5=9$

Άσκηση 11

Βρες την τιμή του φυσικού αριθμού x:

(α) $\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$, (β) $\frac{5}{8}+\frac{x}{16}=\frac{3}{4}$, (γ) $\frac{3}{5}+\frac{x+2}{10}=1$

Λύση

(α) Έχουμε: $\frac{x+3}{4}+\frac{1}{2}=\frac{7}{4}$, άρα: $\frac{x+3}{4}+\frac{1\cdot 2}{2\cdot 2}=\frac{7}{4}$ οπότε:

$\frac{x+3}{4}+\frac{2}{4}=\frac{7}{4}$ ή $\frac{x+3+2}{4}=\frac{7}{4}$ ή $\frac{x+5}{4}=\frac{7}{4}$ ή

ή x + 5 = 7 οπότε: x = 7 − 5 = 2

(β) Έχουμε: $\frac{5}{8}+\frac{x}{16}=\frac{3}{4}$, άρα: $\frac{5\cdot 2}{8\cdot 2}+\frac{x}{16}=\frac{3\cdot 4}{4\cdot 4}$ οπότε:

$\frac{10}{16}+\frac{x}{16}=\frac{12}{16}$ ή $\frac{10+x}{16}=\frac{12}{16}$

ή 10 + x = 12 οπότε: x = 12 − 10 = 2

(γ) Έχουμε: $\frac{3}{5}+\frac{x+2}{10}=1$, άρα: $\frac{3\cdot 2}{5\cdot 2}+\frac{x+2}{10}=\frac{10}{10}$ οπότε:

$\frac{6}{10}+\frac{x+2}{10}=\frac{10}{10}$ ή $\frac{6+x+2}{10}=\frac{10}{10}$ ή $\frac{8+x}{10}=\frac{10}{10}$ ή

ή 8 + x = 10 οπότε: x = 10 − 8 = 2

Άσκηση 12

Λύσε τις εξισώσεις:

(α) ν + 3 = 4, (β) x − 2 = 8, (γ) t + 4 + 1 = 3 + 19, (δ) 6 − x = 5

Λύση

(α) Θα λύσουμε την εξίσωση: ν + 3 = 4, βρίσκοντας τον άγνωστο ν (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό ν (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 3, να προκύψει άθροισμα ίσο με 4.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: ν = 4 − 3 = 1

(β) Θα λύσουμε την εξίσωση: x – 2 = 8, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε έναν αριθμό x (*μειωτέος*), στον οποίον αν αφαιρέσουμε τον αριθμό 2 (*αφαιρετέος*), να προκύψει διαφορά ίση με 8.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 8 + 2 = 10

(γ) Θα λύσουμε την εξίσωση: t + 4 + 1 = 3 + 19, ή ισοδύναμα την εξίσωση: t + 5 = 22, βρίσκοντας τον άγνωστο t (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό t (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 5, να προκύψει άθροισμα ίσο με 22.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: t = 22 − 5 = 17

(δ) Θα λύσουμε την εξίσωση: 6 - x = 5, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε έναν αριθμό x (*αφαιρετέος*), ο οποίος αν αφαιρεθεί από τον αριθμό 6 (*μειωτέος*), να προκύψει διαφορά ίση με 5.

- Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 6 − 5 = 1

Άσκηση 13

Ποιον αριθμό πρέπει να προσθέσεις στον 4, για να προκύψει ο αντίστροφός του $\frac{5}{21}$;

Λύση

Καταρχήν, ο αντίστροφος του $\frac{5}{21}$, είναι ο αριθμός $\frac{21}{5}$.

Έστω ότι x είναι ο ζητούμενος αριθμός. Τότε, θα πρέπει να ισχύει: $x+4=\frac{21}{5}$.

Θα λύσουμε την εξίσωση $x+4=\frac{21}{5}$, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό x (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 4, να προκύψει άθροισμα ίσο με $\frac{21}{5}$.

➢ Ο αριθμός αυτός ισούται με:

$$x=\frac{21}{5}-4=\frac{21}{5}-\frac{4}{1}=\frac{21}{5}-\frac{4\cdot 5}{1\cdot 5}=\frac{21}{5}-\frac{20}{5}=\frac{21-20}{5}=\frac{1}{5}$$

Άσκηση 14

Σε έναν αριθμό προσθέτουμε 5 και παίρνουμε άθροισμα 313. Ποιος είναι ο αριθμός;

Λύση

Έστω ότι x είναι ο ζητούμενος αριθμός, τότε θα πρέπει να ισχύει ότι:
x + 5 = 313. Θα λύσουμε την εξίσωση x + 5 = 313, βρίσκοντας τον άγνωστο x (*λύση*) που την ικανοποιεί. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό x (*προσθετέος*), στον οποίον αν προσθέσουμε τον αριθμό 5, να προκύψει άθροισμα ίσο με 313.

➢ Ο αριθμός αυτός ισούται με: x = 313 – 5 = 308

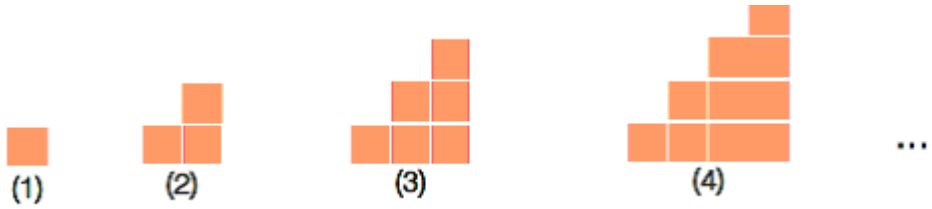
Άσκηση 15

Τα τετράγωνα που αποτελούν τους «δομικούς λίθους» με τους οποίους κατασκευάζονται τα παρακάτω σχήματα, έχουν πλευρά ίση με 1 cm.

(α) Βρες την περίμετρο του 5ου και εξήγησε πως έφτασες στην απάντησή σου.

(β) Γράψε έναν τύπο με τη βοήθεια του οποίου θα μπορείς να υπολογίσεις την περίμετρο κάθε σχήματος.

(γ) Ποια είναι η σειρά του σχήματος του οποίου η περίμετρος είναι 128 cm;



Λύση

(α) Καταρχήν θα υπολογίσουμε την περίμετρο για κάθε ένα από τα τέσσερα πρώτα σχήματα.

- Η περίμετρος του 1ου σχήματος είναι ίση με:

$$Π_1 = 1 + 1 + 1 + 1 = 4 \text{ cm}$$

- Η περίμετρος του 2ου σχήματος είναι ίση με:

$$Π_2 = 8 \cdot 1 = 8 \text{ cm}$$

- Η περίμετρος του 3ου σχήματος είναι ίση με:

$$Π_3 = 12 \cdot 1 = 12 \text{ cm}$$

- Η περίμετρος του 4ου σχήματος είναι ίση με:

$$Π_4 = 16 \cdot 1 = 16 \text{ cm}$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι η περίμετρος κάθε σχήματος διαφέρει από την αντίστοιχη περίμετρο του αμέσως επόμενου σχήματος, κατά 4 cm.

Δηλαδή: $Π_2 = Π_1 + 4$, $Π_3 = Π_2 + 4$, $Π_4 = Π_3 + 4$

- Οπότε, η περίμετρος του 5ου σχήματος προκύπτει ίση με:

$Π_5 = Π_4 + 4 = 16 + 4 = 20$ cm.

(β) Αν ν είναι η σειρά στην οποία είναι το εκάστοτε σχήμα, τότε σύμφωνα με τα συμπεράσματα του ερωτήματος (α):

$Π_1 = 4$ cm, δηλαδή: $Π_1 = 1 \cdot 4$

$Π_2 = 8$ cm, δηλαδή: $Π_2 = 2 \cdot 4$

$Π_3 = 12$ cm, δηλαδή: $Π_3 = 3 \cdot 4$

$Π_4 = 16$ cm, δηλαδή: $Π_4 = 4 \cdot 4$

$Π_5 = 20$ cm, δηλαδή: $Π_5 = 5 \cdot 4$

Συνεπώς, για την τυχαία ν σειρά του σχήματος, η περίμετρος του σχήματος δίνεται από τον τύπο: $Π_ν = ν \cdot 4$ ή ισοδύναμα: $Π_ν = 4 \cdot ν$

(γ) Για να είναι η περίμετρος ίση με 128 cm, σύμφωνα με τον τύπο στον οποίον καταλήξαμε στο ερώτημα (β), έχουμε: $4 \cdot ν = 128$

Οπότε, έχουμε να λύσουμε μία εξίσωση με άγνωστο το ν. Αναζητούμε δηλαδή έναν αριθμό ν, ο οποίος αν πολλαπλασιαστεί με τον αριθμό 4, να προκύψει γινόμενο ίσο με 128. Ο αριθμός αυτός ισούται με: **ν = 128 : 4 = 32**

Άρα, το 32ο σχήμα έχει περίμετρο ίση με 128.

Επιμέλεια: Βασίλης Τσιλιβής – Μαθηματικός

ΑΡΝΟΣ
Online Education

…Πράξεις Παιδείας!