

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$(i) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$(ii) \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

$$(iii) \quad 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$(iv) \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

2. Να αποδείξετε ότι για κάθε θετικό ακέραιο n ισχύει

$$1 + x + x^2 + \dots + x^{n-1} = \frac{x^n - 1}{x - 1}, \quad \text{εφόσον } x \neq 1.$$

3. Να αποδείξετε ότι:

$$(i) \quad n^2 > 2n + 1 \quad \text{για κάθε ακέραιο } n \geq 3$$

$$(ii) \quad \left(\frac{4}{3}\right)^n > n \quad \text{για κάθε ακέραιο } n \geq 7$$

$$(iii) \quad 5^n > 5n - 1 \quad \text{για κάθε θετικό ακέραιο } n.$$