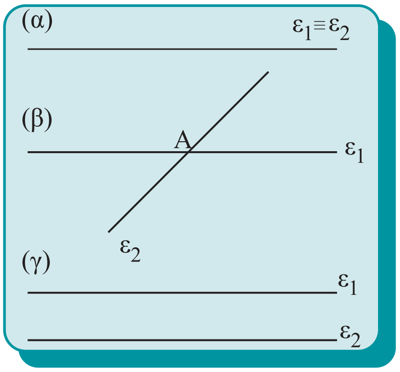
4.1 Εισαγωγή

Όπως είδαμε στην §2.3, δύο **διαφορετικές** ευθείες μπορεί να έχουν ένα μόνο κοινό σημείο ή να μην έχουν κανένα κοινό σημείο.

Επομένως, οι σχετικές θέσεις δυο ευθειών ε_1 και ε_2, οι οποίες βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο, είναι οι παρακάτω:

i) ταυτίζονται (σχ.1α),
ii) τέμνονται (σχ.1β),
iii) δεν τέμνονται (σχ.1γ).



Σχήμα 1

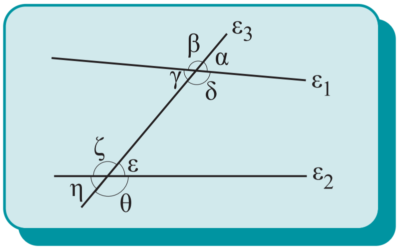
Στην τρίτη περίπτωση οι ευθείες ε_1 και ε_2 λέγονται ***παράλληλες***, ώστε:

Δύο ευθείες ε_1 και ε_2 που βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο και δεν έχουν κοινό σημείο λέγονται παράλληλες ευθείες.

Για να δηλώσουμε ότι οι ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες, γράφουμε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

4.2 Τέμνουσα δύο ευθειών - Ευκλείδειο αίτημα

Ας θεωρήσουμε δύο ευθείες ε_1 και ε_2 του επιπέδου, οι οποίες τέμνονται από τρίτη ευθεία ε_3. Παρατηρούμε ότι σχηματίζονται οκτώ γωνίες.



Σχήμα 2

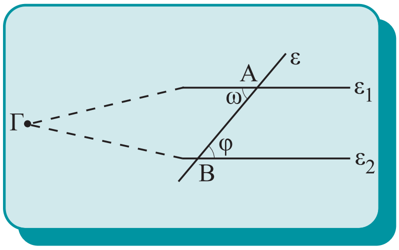
Οι γωνίες γ, δ, ε, ζ που βρίσκονται μεταξύ των ε_1, ε_2 λέγονται ***"εντός"***, ενώ οι γωνίες α, β, η, θ λέγονται ***"εκτός"***. Δύο γωνίες που βρίσκονται προς το ίδιο μέρος της τέμνουσας ε_3 λέγονται ***"επί τα αυτά μέρη"***, ενώ δύο γωνίες που βρίσκονται εκατέρωθεν της ε_3 λέγονται ***"εναλλάξ"***.

Έτσι, με συνδυασμό και των δύο χαρακτηρισμών, οι γωνίες ε και γ λέγονται ***εντός εναλλάξ***, οι γωνίες ε και α λέγονται ***εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη***, ενώ οι γωνίες ε και δ λέγονται ***εντός και επί τα αυτά μέρη***.

Χρησιμοποιώντας τις παραπάνω γωνίες, θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα, που εξασφαλίζει την ύπαρξη παράλληλων ευθειών.

Θεώρημα

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός εναλλάξ γωνίες ίσες, τότε είναι παράλληλες.



Σχήμα 3

Απόδειξη

Έστω ότι ω = φ. Αν οι ευθείες $ε_1$,$ε_2$ τέμνονται σε σημείο Γ, η εξωτερική γωνία φ του τριγώνου ΑΒΓ θα είναι ίση με την απέναντι εσωτερική γωνία ω, που είναι άτοπο. (§ 3.10)

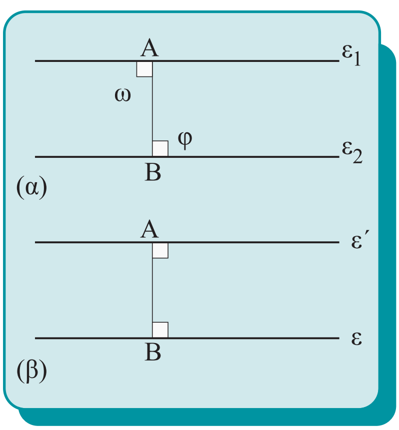
Άρα $ε_1 // ε_2$.

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν δύο εντός, εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες ή δύο εντός και επί τα αυτά μέρη παραπληρωματικές, τότε είναι παράλληλες.

ΠΟΡΙΣΜΑ ΙΙ

Δύο ευθείες κάθετες στην ίδια ευθεία, σε διαφορετικά σημεία της, είναι μεταξύ τους παράλληλες.



Σχήμα 4

Απόδειξη

Πράγματι οι γωνίες ω και φ (σχ.4α) είναι ορθές, οπότε ω = φ. Άρα $ε_1 // ε_2$.

• Θα εξετάσουμε τώρα αν από σημείο εκτός ευθείας μπορούμε να φέρουμε παράλληλες ευθείες προς αυτή και πόσες.

Έστω λοιπόν, ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής (σχ.4β). Φέρουμε την ΑΒ⊥ε και ονομάζουμε ε΄ την ευθεία που είναι κάθετη στην ΑΒ στο σημείο Α. Τότε ε΄//ε (αφού και οι δύο είναι κάθετες στην ΑΒ).

Έτσι λοιπόν **υπάρχει** ευθεία ε΄ που διέρχεται από ένα σημείο Α που δεν ανήκει στην ε και είναι παράλληλη προς την ευθεία ε. Δεχόμαστε ως αξίωμα ότι η ευθεία αυτή είναι **μοναδική**, δηλαδή:

Αίτημα παραλληλίας

Από σημείο εκτός ευθείας άγεται μία μόνο παράλληλη προς αυτή.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω αξίωμα είναι ισοδύναμο με το 5^ο αίτημα των "Στοιχείων" του Ευκλείδη (Ευκλείδειο αίτημα).

Το Ευκλείδειο αίτημα ή κάποιο ισοδύναμό του καθορίζει τη φύση ολόκληρης της Γεωμετρίας και αποτελεί βάση για τα περισσότερα θεωρήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

(βλ. Ιστορικό σημείωμα, σελ. 90)

Ιδιότητες παράλληλων ευθειών

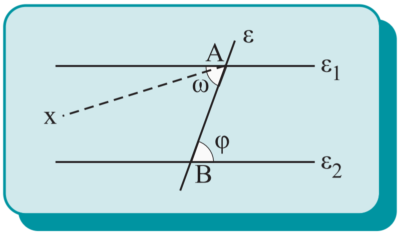
Άμεσες συνέπειες του αιτήματος παραλληλίας είναι οι παρακάτω προτάσεις.

Πρόταση Ι

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη, σχηματίζουν τις εντός εναλλάξ γωνίες ίσες.

Απόδειξη

Έστω ότι $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$ και ε μια τέμνουσα (σχ. 5). Θα αποδείξουμε π.χ. ότι ω = φ. Αν οι γωνίες ω και φ δεν είναι ίσες, φέρουμε την Αx ώστε οι γωνίες $x\hat{A}B$ και φ να βρίσκονται εκατέρωθεν της ε και να είναι ίσες. Τότε $Ax // \varepsilon_2$ γιατί τεμνόμενες από την ΑΒ σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Κατά συνέπεια υπάρχουν δύο παράλληλες από το Α προς την ε_2, που είναι άτοπο. Άρα ω = φ.



Σχήμα 5

Πορισμα

Αν δύο παράλληλες ευθείες τέμνονται από τρίτη σχηματίζουν

i) τις εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη γωνίες ίσες,

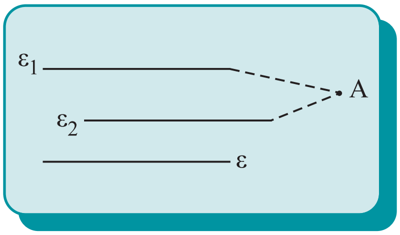
ii) τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες παραπληρωματικές.

Πρόταση ΙΙ

Αν δύο διαφορετικές ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες προς μία τρίτη ευθεία ε, τότε είναι και μεταξύ τους παράλληλες, δηλαδή αν $\varepsilon_1 // \varepsilon$ και $\varepsilon_2 // \varepsilon$, τότε $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.

Απόδειξη

Αν οι ε_1 και ε_2 τέμνονταν σε σημείο Α, θα είχαμε από το Α δύο παράλληλες προς την ε, που είναι άτοπο. Άρα $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$.



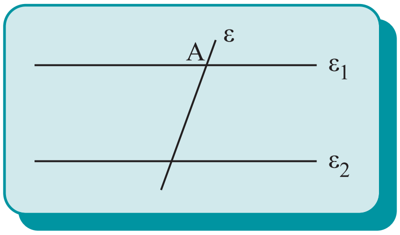
Σχήμα 6

Πρόταση ΙΙΙ

Αν δύο ευθείες ε_1 και ε_2 είναι παράλληλες και μία τρίτη ευθεία ε τέμνει τη μία από αυτές, τότε η ε θα τέμνει και την άλλη.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι η ε τέμνει την ε_1 στο Α. Αν η ε δεν έτεμνε την ε_2, θα ήταν $\varepsilon // \varepsilon_2$ και έτσι θα είχαμε από το Α δύο παράλληλες προς την ε_2, πράγμα αδύνατο. Άρα η ε τέμνει την ε_2.



Σχήμα 7

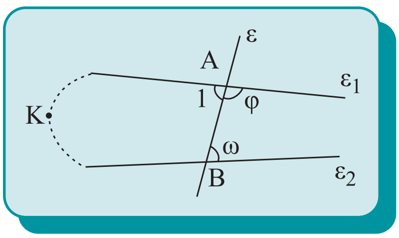
Πορισμα

Αν μια ευθεία είναι κάθετη σε μια από δύο παράλληλες ευθείες, τότε είναι κάθετη και στην άλλη.

Πρόταση IV

Αν δύο ευθείες τεμνόμενες από τρίτη σχηματίζουν τις εντός και επί τα αυτά μέρη γωνίες με άθροισμα μικρότερο από 2 ορθές, τότε οι ευθείες τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες.

Απόδειξη



Σχήμα 8

Έστω ότι η ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Α και Β (σχ. 8) αντίστοιχα και ότι $φ + ω \neq 2\llcorner$. Τότε οι $ε_1$ και $ε_2$ δεν είναι παράλληλες, αφού $φ + ω \neq 2\llcorner$ (Πόρισμα σελ. 77). Έστω ότι οι $ε_1$ και $ε_2$ τέμνονται σε σημείο Κ, προς το μέρος της τέμνουσας, που δεν περιέχει τις γωνίες ωκαι φ. Τότε, όμως, η εξωτερική γωνία ω του τριγώνου ΑΚΒ είναι μεγαλύτερη από τη γωνία $\hat{A}_1$, δηλαδή $ω > \hat{A}_1 = 2\llcorner - φ$ ή $ω + φ > 2\llcorner$, που είναι άτοπο. Άρα οι $ε_1$,$ε_2$ τέμνονται προς το μέρος της τέμνουσας που βρίσκονται οι γωνίες ω και φ.

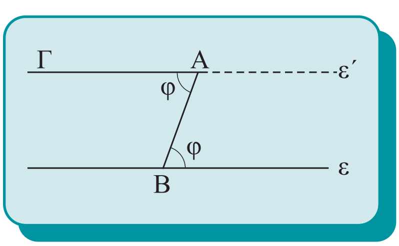
ΣΧΟΛΙΟ

Η πρόταση IV αποτελεί ***βασικό κριτήριο*** *με το οποίο εξετάζουμε αν δύο ευθείες τέμνονται.*

Πορισμα

Η κατασκευή τριγώνου με δοσμένη μία πλευρά και τις δύο προσκείμενες σε αυτή γωνίες έχει λύση, αν και μόνο αν το άθροισμα των δύο γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών. (βλέπε § 3.18 – Πρόβλημα 2)

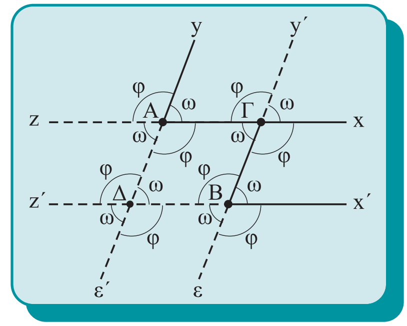
4.3 Κατασκευή παράλληλης ευθείας



Σχήμα 9

Είδαμε παραπάνω ότι υπάρχει ευθεία ε΄, η οποία διέρχεται από ένα σημείο Α και είναι παράλληλη προς γνωστή ευθεία ε. Για την κατασκευή της ε΄ φέρουμε από το Α ένα πλάγιο τμήμα ΑΒ προς την ε και ονομάζουμε φ την οξεία γωνία που σχηματίζει το ΑΒ με την ε. Μεταφέρουμε τη γωνία φ (§ 2.6) ώστε να έχει κορυφή το Α, η μια πλευρά της να είναι η ΑΒ και η άλλη πλευρά της ΑΓ να βρίσκεται στο ημιεπίπεδο που δεν ανήκει η γωνία φ. Επειδή $Γ\hat{A}B = φ$ έχουμε ΑΓ//ε, αφού τεμνόμενες από την ΑΒ, σχηματίζουν δύο εντός και εναλλάξ γωνίες ίσες. Έτσι η ευθεία ΑΓ είναι η ζητούμενη ευθεία ε΄.

4.4 Γωνίες με πλευρές παράλληλες

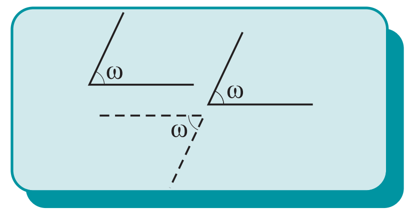


Σχήμα 10

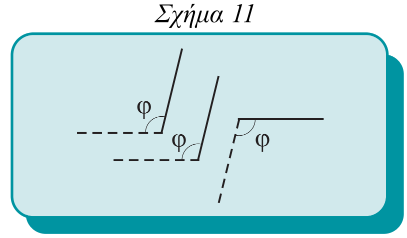
Ας θεωρήσουμε δύο γωνίες $x\hat{A}y$ και $x΄\hat{B}y΄$ με $Ax//Bx΄$ και $Ay//By΄$, δηλαδή δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους, μία προς μία παράλληλες. Αν προεκτείνουμε τις $Bx΄$ και $By΄$ θα τέμνουν τις Ax και Ay στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Έτσι όλες οι γωνίες του σχήματος 10 λόγω των παραλλήλων θα είναι ίσες με ω ή φ.

Παρατηρούμε ότι:

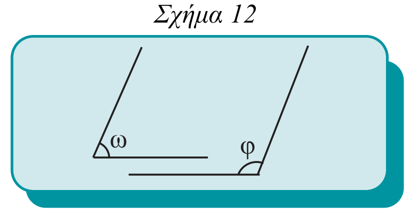
- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **οξείες** (σχ.11), είναι ίσες.
- Αν και οι **δύο γωνίες** είναι **αμβλείες** (σχ.12), είναι ίσες.
- Αν η μία γωνία είναι **οξεία** και η άλλη **αμβλεία** (σχ.13), είναι παραπληρωματικές.



Σχήμα 11



Σχήμα 12



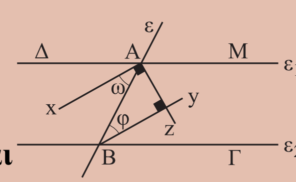
Σχήμα 13

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι:

Δύο γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες, μία προς μία, είναι ίσες αν είναι και οι δύο οξείες ή αμβλείες, ενώ είναι παραπληρωματικές αν η μία γωνία είναι οξεία και η άλλη αμβλεία.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω ε_1 και ε_2 δύο παράλληλες που τέμνονται από ευθεία ε.
Να αποδειχθεί ότι
(i) Οι διχοτόμοι δύο εντός εναλλάξ γωνιών είναι παράλληλες.
(ii) Οι διχοτόμοι δύο εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι κάθετες.



Σχήμα 14

Απόδειξη

(i) Έστω Ax, By οι διχοτόμοι των γωνιών $\Delta\hat{A}B$ και $A\hat{B}\Gamma$ αντίστοιχα.

Τότε $\omega = \dfrac{\Delta\hat{A}B}{2}$ και $\varphi = \dfrac{A\hat{B}\Gamma}{2}$. Αλλά $\Delta\hat{A}B = A\hat{B}\Gamma$ (ως εντός εναλλάξ).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι $\omega = \varphi$. Οι ω και φ όμως είναι εντός εναλλάξ γωνίες των ευθειών Ax και By με τέμνουσα την AB. Άρα $Ax//By$.

(ii) Αν Az διχοτόμος της $M\hat{A}B$, τότε $Az \perp Ax$ (ως διχοτόμοι εφεξής και παραπληρωματικών γωνιών). Αφού $Ax//By$, θα είναι και $Az \perp By$.

4.5 Αξιοσημείωτοι κύκλοι τριγώνου

Στην παράγραφο αυτή χρησιμοποιούμε το Ευκλείδειο αίτημα για να μελετήσουμε τους κύκλους που σχετίζονται με ένα τρίγωνο.

• Ο περιγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

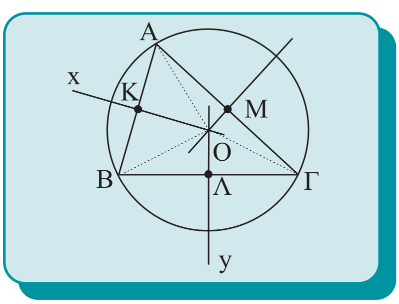
Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος που διέρχεται από τις τρεις κορυφές του. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***περιγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και επιπλέον αποδεικνύεται ότι το κέντρο του είναι ένα σημείο στο οποίο συντρέχουν και οι τρεις μεσοκάθετοι του τριγώνου και λέγεται ***περίκεντρο***.

Θεώρημα

Οι τρεις μεσοκάθετοι ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τις κορυφές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ, Λ , Μ τα μέσα των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΑΓ αντίστοιχα. Οι μεσοκάθετοι Κx και Λy των ΑΒ, ΒΓ θα τέμνονται σε σημείο Ο, αφού τέμνονται οι κάθετες ευθείες τους ΑΒ και ΒΓ. Το Ο ισαπέχει από τις κορυφές Α και Β αφού ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΑΒ, δηλαδή ΟΑ=ΟΒ. Επίσης ΟΒ=ΟΓ, αφού το Ο ανήκει στη μεσοκάθετο της πλευράς ΒΓ. Επομένως ισχύει ότι ΟΑ=ΟΓ, οπότε το Ο θα ανήκει και στη μεσοκάθετο της ΑΓ. Άρα, ο κύκλος (Ο,ΟΑ) θα διέρχεται από τις τρεις κορυφές του τριγώνου ΑΒΓ και είναι ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου.



Σχήμα 15

• Ο εγγεγραμμένος κύκλος τριγώνου

Ενας άλλος σημαντικός κύκλος βρίσκεται στο εσωτερικό τριγώνου και εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του. Θα αποδείξουμε ότι για κάθε τρίγωνο υπάρχει κύκλος με την ιδιότητα αυτή. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***εγγεγραμμένος*** κύκλος του τριγώνου και το κέντρο του, το οποίο λέγεται ***έγκεντρο***, θα είναι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

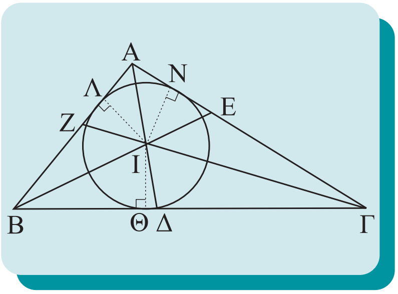
Οι διχοτόμοι των γωνιών ενός τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και οι διχοτόμοι ΒΕ και ΓΖ των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ αντίστοιχα. Οι ΒΕ και ΓΖ τέμνονται σε σημείο Ι αφού $E\hat{B}\Gamma + Z\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}}{2} + \frac{\hat{\Gamma}}{2} < \hat{B} + \hat{\Gamma} < 2\llcorner$. (§ 4.2 – Πρόταση IV)

Το Ι ως σημείο της διχοτόμου της $\hat{B}$ θα ισαπέχει από τις πλευρές της ΒΑ και ΒΓ, δηλαδή ΙΛ = ΙΘ. Ανάλογα το Ι θα ισαπέχει από τις πλευρές της $\hat{\Gamma}$, δηλαδή ΙΘ = ΙΝ. Επομένως το Ι ισαπέχει από τις ΑΒ και ΑΓ και θα ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$.

Τελικά, το Ι είναι το σημείο τομής και των τριών διχοτόμων του τριγώνου. Με κέντρο το Ι και ακτίνα την κοινή απόσταση του Ι από τις πλευρές του ΑΒΓ, γράφεται κύκλος που εφάπτεται και στις τρεις πλευρές του τριγώνου.



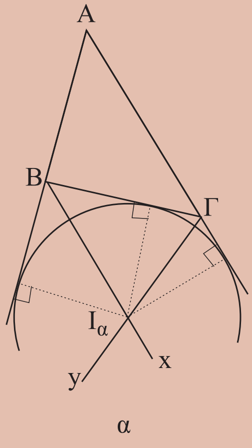
Σχήμα 16

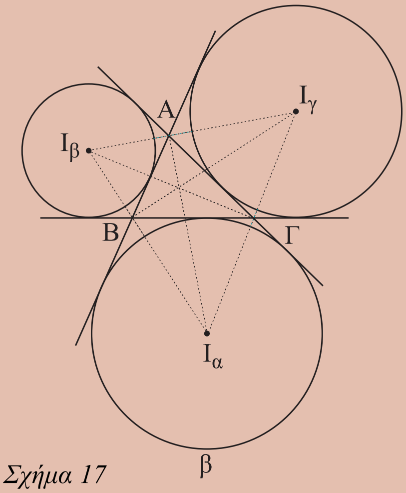
ΕΦΑΡΜΟΓΗ *Οι παρεγγεγραμμένοι κύκλοι τριγώνου*

Η ιδιότητα των εσωτερικών διχοτόμων ενός τριγώνου να διέρχονται από το ίδιο σημείο ισχύει και όταν θεωρήσουμε δύο εξωτερικές και μία εσωτερική διχοτόμο του τριγώνου. Οι τρεις αυτές διχοτόμοι τέμνονται σε σημείο το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων. Ο κύκλος αυτός λέγεται ***παρεγγεγραμμένος*** και το κέντρο του ***παράκεντρο*** του τριγώνου. Σε κάθε τρίγωνο υπάρχουν τρία παράκεντρα, τα οποία συμβολίζουμε I_α, I_β, I_γ, και κατά συνέπεια τρεις παρεγγεγραμμένοι κύκλοι (σχ.17α,β).

Οι διχοτόμοι δύο εξωτερικών γωνιών ενός τριγώνου και η ημιευθεία που διχοτομεί την τρίτη γωνία του τριγώνου διέρχονται από το ίδιο σημείο, το οποίο είναι κέντρο κύκλου που εφάπτεται στη μία πλευρά του τριγώνου και στις προεκτάσεις των δύο άλλων.

Απόδειξη





Σχήμα 17

Ας θεωρήσουμε τις διχοτόμους Βx και Γy των δύο εξωτερικών γωνιών $\hat{B}_{\varepsilon\xi}$ και $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}$ αντίστοιχα, του τριγώνου ΑΒΓ. Οι Βx και Γy τέμνονται σε σημείο I_α, αφού ισχύει ότι:

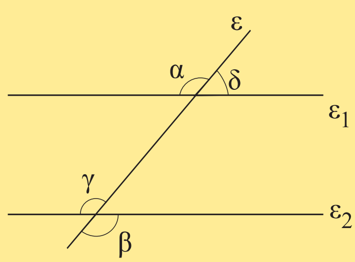
$$x\hat{B}\Gamma + y\hat{\Gamma}B = \frac{\hat{B}_{\varepsilon\xi} + \hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi}}{2} = 2\llcorner - \frac{\hat{B} + \hat{\Gamma}}{2} < 2\llcorner .$$

Το I_α ισαπέχει από τη ΒΓ και την προέκταση της ΑΒ, καθώς και από την προέκταση της ΑΓ. Επομένως ανήκει στη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$, αφού ισαπέχει από τις πλευρές της.

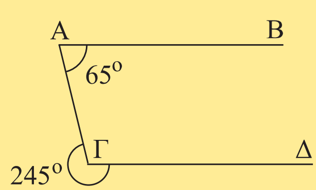
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

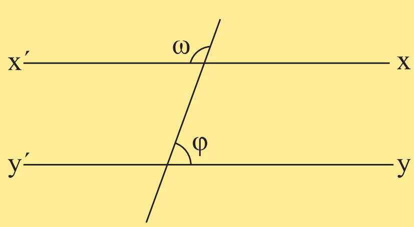
1. *i) Πώς ονομάζονται οι γωνίες α και β του παρακάτω σχήματος; Τι σχέση έχουν μεταξύ τους;*
ii) Τι ισχύει για τις γωνίες $\hat{\gamma}$ και $\hat{\delta}$;



2. *Να εξηγήσετε γιατί η ΑΒ είναι παράλληλη της ΓΔ.*



3. *Αν $\omega = 120° - \theta$ και $\varphi = 60° + \theta$ να εξηγήσετε γιατί $xx'//yy'$.*



4. *Να αναφέρετε πέντε (5) τρόπους για να αποδείξουμε ότι δύο ευθείες είναι παράλληλες.*

5. *Δύο οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους παράλληλες είναι:*
i) συμπληρωματικές,
ii) ίσες,
iii) παραπληρωματικές,
iv) κανένα από τα παραπάνω.
Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε παράλληλη προς τη βάση του ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές.*

2. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και σημείο Α της διχοτόμου της. Αν η παράλληλη από το Α προς την Οx τέμνει την Οy στο Β, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΟΑΒ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η διχοτόμος της ΟΔ. Από σημείο Α της Οy φέρουμε παράλληλη προς την ΟΔ που τέμνει την προέκταση της Οx στο Β. Να αποδείξετε ότι ΟΑ = ΟΒ.*

4. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και σημείο Δ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Δ,ΔΒ) τέμνει τη ΒΓ στο Ε, να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΑΓ.*

5. *Στις προεκτάσεις των πλευρών ΒΑ, ΓΑ τριγώνου ΑΒΓ παίρνουμε αντίστοιχα τα τμήματα: ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ=ΑΓ. Να αποδείξετε ότι ΔΕ//ΒΓ.*

6. *Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) και Μ το μέσο χορδής του ΑΒ. Φέρουμε $Ox \perp OM$. Να αποδείξετε ότι Οx//ΑΒ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και η διάμεσος του ΑΜ. Φέρουμε $\Gamma x \perp B\Gamma$ προς το ημιεπίπεδο που δεν ανήκει το Α και παίρνουμε σε αυτή τμήμα ΓΔ = ΑΒ. Να αποδείξετε ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{A}\Gamma$.*

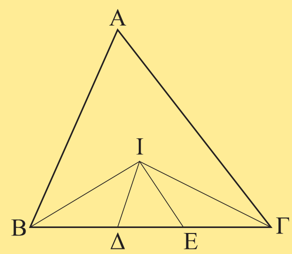
2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΕ//ΑΔ που τέμνει την προέκταση της ΓΑ στο Ε. Να αποδείξετε ότι ΕΓ = ΑΒ+ΑΓ.*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η εξωτερική διχοτόμος του Αx. Από την κορυφή Β φέρουμε ΒΔ//Αx που τέμνει την ΑΓ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΔΓ = ΑΓ – ΑΒ.*

4. *Από το έγκεντρο Ι, τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ευθεία παράλληλη της ΒΓ που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία*

Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΒΔ+ΓΕ.

5. *Από το έγκεντρο Ι τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε ΙΔ//ΑΒ και ΙΕ//ΑΓ. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΔΙΕ ισούται με τη ΒΓ.*



Σύνθετα θέματα

1. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΒΔ και η εξωτερική διχοτόμος του Βx. Θεωρούμε δύο σημεία Ε και Κ της πλευράς ΑΒ. Αν ο κύκλος (Ε,ΕΒ) τέμνει τη ΒΔ στο Ζ, ενώ ο κύκλος (Κ,ΚΒ) τέμνει τη Βx στο Μ, να αποδείξετε ότι ΕΖ//ΜΚ.*

2. *Από τα άκρα ευθύγραμμου τμήματος ΑΒ φέρουμε προς το ίδιο ημιεπίπεδο δύο παράλληλες ημιευθείες Αx και Βy. Παίρνουμε Γ τυχαίο σημείο του ΑΒ, και στις Αx,Βy τα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα, ώστε ΑΔ = ΑΓ και ΒΕ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $\Delta\hat{\Gamma}E$ είναι ορθή.*

3. *Από το παράκεντρο I_α τριγώνου ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ φέρουμε παράλληλη στην ΑΒ, που τέμνει τις πλευρές ΒΓ και ΑΓ στα σημεία Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι ΔΕ = ΑΕ – ΒΔ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ<ΑΓ και Μ σημείο της πλευράς ΒΓ. Από το Μ φέρουμε παράλληλη προς τη διχοτόμο ΑΔ της γωνίας $\hat{A}$, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

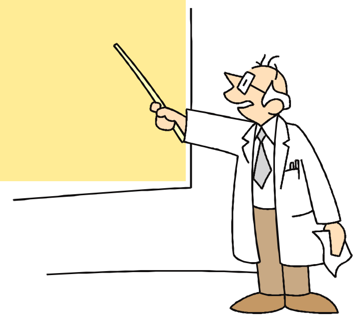
i) Το τρίγωνο ΕΑΖ είναι ισοσκελές.

ii) ΒΕ+ΓΖ = σταθερό.

iii) Αν Μ μέσο της ΒΓ τότε:

α) $BE = \Gamma Z = \dfrac{A\Gamma + AB}{2}$,

β) $AE = AZ = \dfrac{A\Gamma - AB}{2}$.



4.6 Άθροισμα γωνιών τριγώνου

Η παραλληλία επιτρέπει να μεταφέρουμε τις γωνίες ενός τριγώνου, ώστε να έχουν κοινή κορυφή μια οποιαδήποτε κορυφή του τριγώνου και να σχηματίζουν ευθεία γωνία (σχ.18). Έτσι μπορούμε να υπολογίσουμε το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου.

Θεώρημα

Το άθροισμα των γωνιών κάθε τριγώνου είναι 2 ορθές.

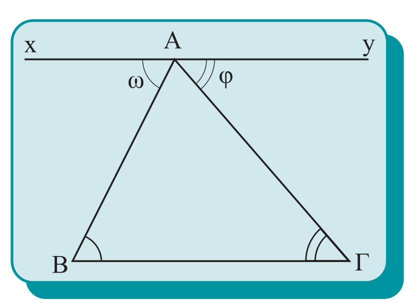
Απόδειξη

Από μια κορυφή, π.χ. την Α, φέρουμε ευθεία xy//ΒΓ. Τότε $\omega = \hat{B}$ (1) και $\varphi = \hat{\Gamma}$ (2), ως εντός και εναλλάξ των παραλλήλων xy και ΒΓ με τέμνουσες ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

Αλλά $\omega + \hat{A} + \varphi = 2\llcorner$ (3).

Από τις (1), (2) και (3) προκύπτει ότι

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{\Gamma} = 2\llcorner.$$



Σχήμα 18

Πορισματα

i) Κάθε εξωτερική γωνία τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των δύο απέναντι εσωτερικών γωνιών του τριγώνου.