ΕΡΓΑΣΙΑ ΕΚΠΑ ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ (2003/2004)
(Εύρεση αθροίσματος n όρων με τη μέθοδο της επαγωγής)

Να δειχτεί επαγωγικά ότι $1+3+9+...+3^n = \frac{1}{2}(3^{n+1}-1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Υποδειγματική Λύση

Έστω $P(n)$ η πρόταση που θέλουμε να αποδείξουμε.

Για $n=1$:

$1+3 = \frac{1}{2}(3^{1+1}-1)$ ➔ $4=4$ ➔ $P(1)$ αληθής

Έστω ότι ισχύει για $n=k$:

$$1+3+9+...+3^k = \frac{1}{2}(3^{k+1}-1)$$

Θα αποδείξουμε ότι η πρόταση ισχύει για $n=k+1$:

(Δηλαδή ότι $1+3+9+...+3^k+3^{k+1} = \frac{1}{2}(3^{k+2}+1)$)

$$1+3+9+...+3^k+3^{k+1} =$$

$$=[1+3+9+...+3^k]+3^{k+1} =$$

$$=\frac{1}{2}(3^{k+1}+1)+3^{k+1} =$$

$$=\frac{1}{2}3^{k+1}+\frac{1}{2}+3^{k+1} =$$

$$=\frac{3}{2}3^{k+1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(3^{k+2}+1)$$

Επομένως $P(k+1)$ ισχύει.

Άρα $P(n)$ αληθής.