

Άσκηση 1.21

Να δειχθεί ότι $\forall n \in \mathbb{N}$ ισχύει η σχέση

$$(n!)^3 \leq n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n}$$

Απόδειξη

$$\sqrt[n]{(n!)^3} = \sqrt[n]{1^3 \cdot 2^3 \cdot \dots \cdot n^3} \leq \frac{1^3 + 2^3 + \dots + n^3}{n} \quad (\text{Από Ανισότητα Αριθμ. Γεωμετρικού Μέσου})$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2 = n \cdot \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \quad (\text{από άσκηση 1.10})$$

$$\text{Άρα} \quad (n!)^3 \leq n^n \left(\frac{n+1}{2}\right)^{2n} .$$