

ΟΡΙΣΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

$$\text{i)} \int_1^3 \left(\sqrt{x} + \frac{2}{x^2} + e^x \right) dx \quad \text{ii)} \int_1^2 (9x^2 + x - 4) dx \quad \text{iii)} \int_{1/2}^2 \cos(\pi x) dx$$

$$\text{iv)} \int_1^e \frac{1 + \ln x}{x(5 + \ln x)} dx$$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

$$\text{i)} \int_{-1}^2 \frac{1}{3x+2} dx \quad \text{ii)} \int_1^6 \frac{1}{\sqrt{x+3}} dx \quad \text{iii)} \int_0^{\pi} \sin\left(\frac{x}{6}\right) dx \quad \text{iv)} \int_{-1}^1 \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2} dx$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να υπολογισθούν τα παρακάτω ορισμένα ολοκληρώματα.

$$\text{i)} \int_1^2 \ln^2 x dx \quad \text{ii)} \int_0^{\pi} \sin^2 x dx \quad \text{iii)} \int_0^{\pi/2} \cos^5 x \sin 2x dx \quad \text{iv)} \int_1^{3/2} \frac{1}{x^2 + x} dx$$

Εφαρμογές ορισμένου ολοκληρώματος.

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τα γραφήματα των $y = \sqrt{x}$, $\psi = 2-x$ και του άξονα του X.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθεί το εμβαδόν της περιοχής του άνω ημιεπιπέδου ($y \geq 0$) που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $y = -x^2 + 2x + 3$ και του άξονα των X.

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να υπολογισθεί το εμβαδόν που περικλείεται από τα γραφήματα των συναρτήσεων $y=2x-x^3$, $y=x^2$.

ΑΣΚΗΣΗ 4

Ομοίως στις παρακάτω περιπτώσεις:

- α) τους άξονες x και y , την ευθεία $x=3$ και την παραβολή $y=x^2+1$
- β) τον άξονα x , τις ευθείες $x=a$, $x=\beta$ και την καμπύλη $y=e^x+2$ όταν $\beta>a$
- γ) τις παραβολές $y=x^2$ και $y=8-x^2$
- δ) τις καμπύλες $y = \ln x$ και $y = \ln^2 x$

ΑΣΚΗΣΗ 5

Να βρεθεί το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ του γραφήματος της συνάρτησης $y = x(x-1)(x-2)$ και του άξονα των x από $x=0$ μέχρι και $x=2$. Συγκρίνεται το αποτέλεσμα που βρήκατε με την τιμή του ολοκληρώματος $\int_0^2 x(x-1)(x-2)dx$ και δικαιολογήστε την ύπαρξη ή μη της διαφοράς.

ΓΕΝΙΚΕΥΜΕΝΟ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Να υπολογιστεί το γενικευμένο ολοκλήρωμα : $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx$

ΑΣΚΗΣΗ 2

Να βρεθεί η τιμή του γενικευμένου ολοκληρώματος: $\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Να ελεγχθεί η ύπαρξη των παρακάτω γενικευμένων ολοκληρωμάτων και να υπολογισθούν αυτά που υπάρχουν.

α) $\int_0^1 \ell n x dx$ β) $\int_1^2 \frac{1}{x^2 - 1} dx$ γ) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$ δ) $\int_0^{+\infty} e^{-ax^2} x dx$

ΑΣΚΗΣΗ 4

Για τα γενικευμένα ολοκληρώματα που ακολουθούν, υπολογίστε την τιμή τους ή αποδείξτε ότι δεν υπάρχουν.

α) $\int_0^1 x \ell n x dx$ β) $\int_1^2 \frac{1}{x \ell n x} dx$ γ) $\int_0^{+\infty} x \sin x dx$ δ) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 + 1} dx$