ΘΕΜΑ 4

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και Δ, Ε τα μέσα των πλευρών του ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Στην προέκταση της ΔΕ (προς το Ε) θεωρούμε σημείο Λ ώστε ΕΛ = ΑΕ και στην προέκταση της ΕΔ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Κ τέτοιο ώστε ΔΚ = ΑΔ.

Να αποδείξετε ότι:

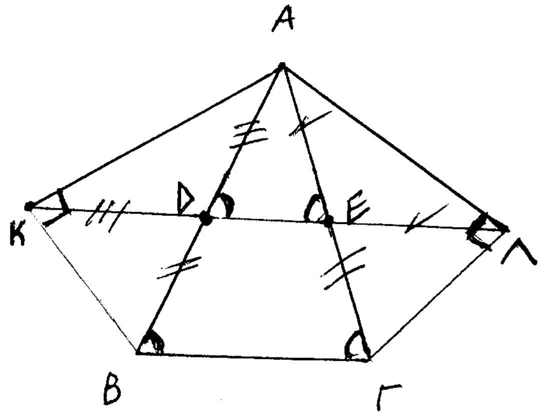
α) ΚΔ = ΛΕ. (Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ορθογώνια. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα ΑΚΒ και ΑΛΓ είναι ίσα. (Μονάδες 10)

3994

Θέμα 4ο



α/ $A\Delta = \underset{A\Gamma}{\underset{\parallel}{AB}} - \underset{E\Gamma}{\underset{\parallel}{\Delta B}} = A\Gamma - E\Gamma = AE$

Αφού $A\Delta = AE$, τότε και $K\Delta = E\Lambda$.

β/ $K\Delta$ διάμεσος του τριγώνου $\overset{\triangle}{AKB}$

Ισχύει $K\Delta = \frac{AB}{2}$, άρα AB υποτείνουσα

και $A\hat{K}B = 90^\circ$

ΛE διάμεσος του τριγώνου $\overset{\triangle}{A\Lambda\Gamma}$.

Ισχύει $E\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}$, άρα $A\Gamma$ υποτείνουσα

και $A\hat{\Lambda}\Gamma = 90^\circ$.

γ/ $A\hat{\Delta}E = A\hat{E}\Delta$ (αφού $A\overset{\triangle}{\Delta}E$ ισοσκελές)
Επομένως και οι παραπληρωματικές τους θα είναι ίσες, δηλαδή $A\hat{\Delta}K = A\hat{E}\Lambda$.

Τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}\Delta$ και $A\overset{\triangle}{E}\Lambda$ είναι ίσα σύμφωνα και το κριτήριο ΠΓΠ.

$$\begin{pmatrix} A\Delta = AE \\ \Delta K = E\Lambda \\ A\hat{\Delta}K = A\hat{E}\Lambda \end{pmatrix}$$

Συγκρίνω τα ορθογώνια τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}B$ και $A\overset{\triangle}{\Lambda}\Gamma$.
$AK = A\Lambda$ (αφού τα τρίγωνα $A\overset{\triangle}{K}\Delta$, $A\overset{\triangle}{E}\Delta$ είναι ίσα)
$AB = A\Gamma$ (αφού $A\overset{\triangle}{B}\Gamma$ ισοσκελές)
Επομένως αφού έχουν μια κάθετη πλευρά και την υποτείνουσα ίσες, τότε είναι ίσα.