ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. *Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.*

3. *Συμπληρώστε τα κενά:*

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ....

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ....

iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν ....

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν ....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι΄ το σημείο τομής των διχοτόμων Α΄Δ΄ και Β΄Ε΄ του Α΄Β΄Γ΄ να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΔ = Α΄Δ΄ και ΒΕ = Β΄Ε΄

ii) ΑΙ = Α΄Ι΄ και ΒΙ = Β΄Ι΄.

2. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

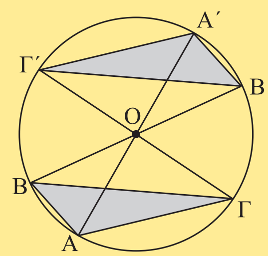
ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*

2. *Αν ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι ίσα.*



3. *Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.*

Σύνθετα θέματα

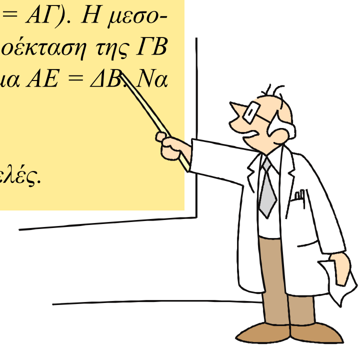
1. *Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α΄Μ΄ και η αντίστοιχη διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Θ΄. Να αποδείξετε ότι: i) ΒΔ = Β΄Δ΄, ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$, iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α΄Β΄Θ΄ είναι ίσα, iv) ΑΘ = Α΄Θ΄ και ΘΔ = Θ΄Δ΄.*

2. *Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.*

3. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.



3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

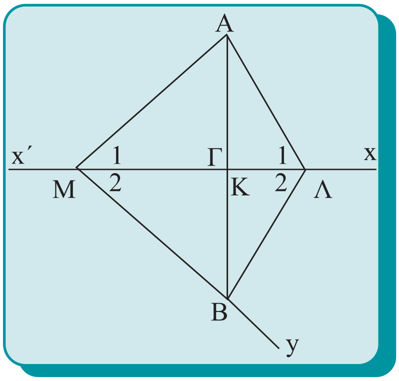
Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

Απόδειξη

Έστω ευθεία $x'x$, σημείο Α εκτός αυτής και σημείο Μ της $x'x$ (σχ.23). Αν η ΑΜ είναι κάθετη στην $x'x$, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η ΑΜ δεν είναι κάθετη στην $x'x$. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η $x'x$ και δεν περιέχει το Α θεωρούμε την ημιευθεία My, ώστε να είναι $x\hat{M}y = A\hat{M}x$ και πάνω σε αυτή σημείο Β, ώστε ΜΑ = ΜΒ. Επειδή τα σημεία Α,Β είναι εκατέρωθεν της $x'x$, η $x'x$ τέμνει την ΑΒ σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω Κ. Αφού ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η ΜΚ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ, άρα είναι και ύψος και επομένως $AB \perp x'x$.

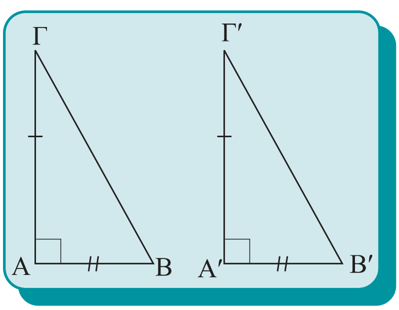


Σχήμα 23

Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ΑΛ κάθετη στην $x'x$. Τότε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΒΜΛ είναι ίσα, γιατί έχουν ΜΛ κοινή, ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$. Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90°$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90°$, οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία Α,Λ,Β είναι συνευθειακά, δηλαδή η ΑΛ ταυτίζεται με την ΑΚ, που είναι άτοπο.

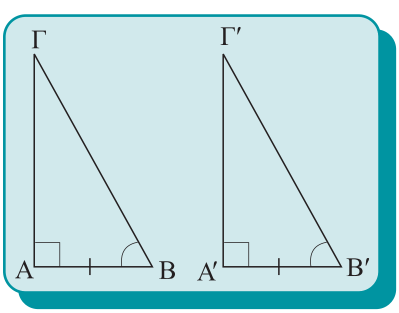
3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:



Σχήμα 24

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα.** (σχ.24).
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα** (σχ.25).

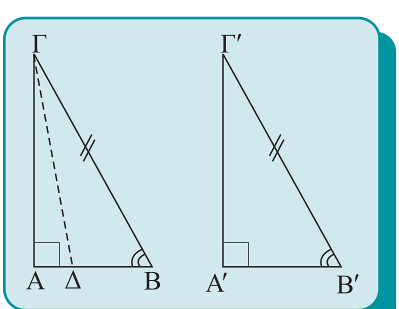


Σχήμα 25

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

Θεώρημα Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.



Σχήμα 26

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και ΑΒ = Α′Β′. Έστω ότι $AB \neq A'B'$, π.χ. $AB > A'B'$. Τότε στην πλευρά ΒΑ υπάρχει σημείο Δ, ώστε ΒΔ = Α′Β′.

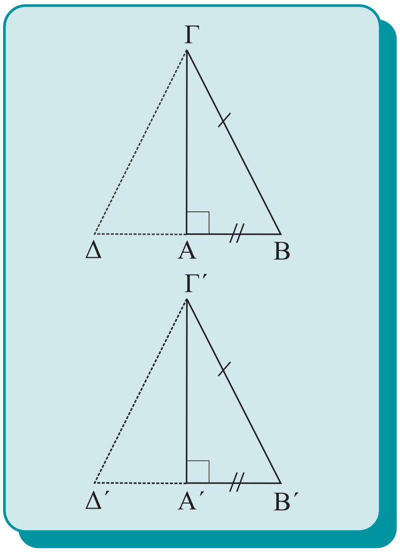
Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΔΒ = Α′Β′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι $\hat{\Delta} = \hat{A}' = 90°$, δηλαδή ΓΔ⊥ΑΒ. Έτσι έχουμε ΓΑ⊥ΑΒ και ΓΔ⊥ΑΒ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α′Β′. Άρα ΑΒ = Α′Β′, οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΑ = Β′Α′ και $\hat{B} = \hat{B}'$ (ΠΓΠ).

Θεώρημα ΙΙ

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β′Γ′ και ΑΒ = Α′Β′. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και Β′Α′ θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ′, ώστε να είναι ΑΔ = ΑΒ και Α′Δ′ = Α′Β′. Τότε η ΓΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ και η Γ′Α′ μεσοκάθετος του Δ′Β′. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ΓΔ = ΓΒ και Γ′Δ′ = Γ′Β′. Από τις τελευταίες ισότητες και την ΒΓ = Β′Γ′ προκύπτει ότι ΓΔ = Γ′Δ′. Έτσι τα τρίγωνα ΓΔΒ και Γ′Δ′Β′ έχουν ΓΔ = Γ′Δ′, ΒΓ = Β′Γ′ και ΔΒ = Δ′Β′ (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων ΑΒ και Α′Β′), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Σχήμα 27

Πόρισμα Ι

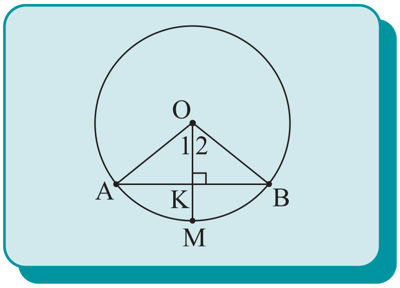
Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

Πόρισμα ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο,ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ = ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα



Σχήμα 28

είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο του ΑΒ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ολες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:.

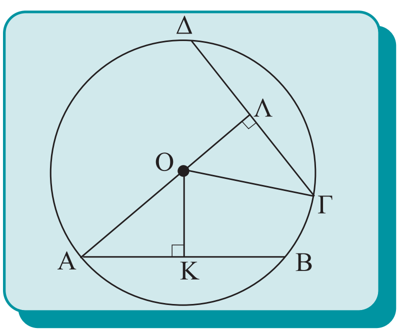
Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**
- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

Θεώρημα ΙΙΙ

Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη



Σχήμα 29

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

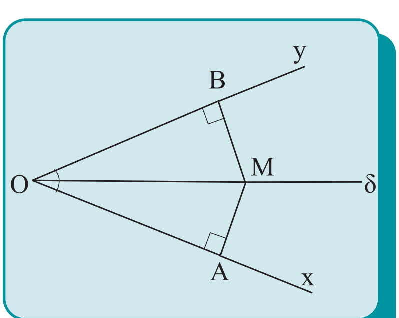
Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$AK = \Gamma\Lambda \quad \text{ή} \quad \frac{AB}{2} = \frac{\Gamma\Delta}{2} \quad \text{ή} \quad AB = \Gamma\Delta.$$

Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη



Σχήμα 30

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως ΜΑ = ΜΒ.

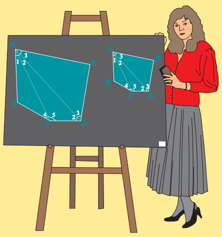
Αντίστροφα. Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ⊥Οx και ΜΒ⊥Οy και υποθέτουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και ΜΑ=ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.

Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:
Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

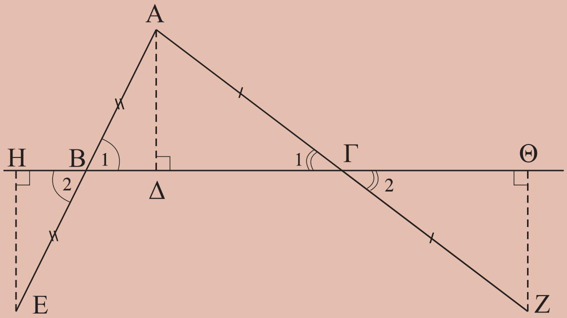
Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:
(i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,
(ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Σχήμα 31

Λύση

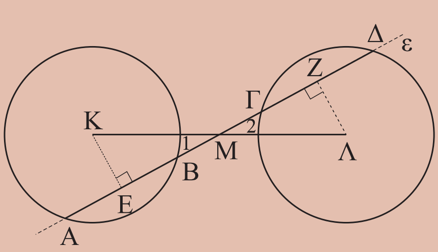
(i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{H} = 90°$) και έχουν ΑΒ = ΒΕ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.

Όμοια και τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΖΓΘ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Theta} = 90°$, ΑΓ = ΓΖ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.

(ii) Από την ισότητα των τριγώνων ΑΒΔ και ΕΒΗ προκύπτει ότι ΕΗ=ΑΔ. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει ΖΘ = ΑΔ. Επομένως ΕΗ = ΖΘ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 32

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΖΜΛ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΚΜ = ΜΛ, γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ = ΛΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Αν $AB \perp \varepsilon$ και $A\Gamma \perp \varepsilon$ (Β, Γ σημεία της ε) τότε:*

i) $B \equiv \Gamma$	Σ	Λ
ii) $B \not\equiv \Gamma$	Σ	Λ
iii) $AB = A\Gamma$	Σ	Λ

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:*

π_1: *Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.*

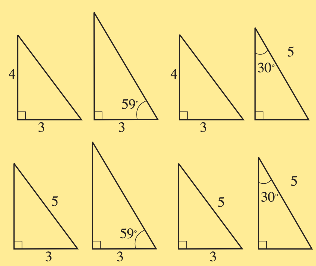
π_2: *Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.*

π_3: *Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου.*

Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις π_1, π_2, π_3, *τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;*

3. *Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.*

4. *Στο διπλανό σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.*



5. *Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:*
Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της .... και διχοτομεί ....

6. *Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:*

α. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2}KZ$,

β. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE > KZ$,

γ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE = KZ$,

δ. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow \frac{1}{2}KE = \frac{1}{3}KZ$,

ε. $AB = \Gamma\Delta \Leftrightarrow KE < KZ$.

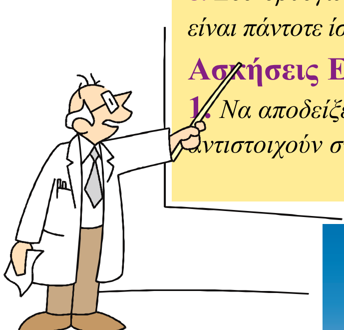
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. *Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;*

8. *Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.*



2. *Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:*
i) από τη βάση,
ii) από τις ίσες πλευρές.

3. *Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.*

4. *Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
ii) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι* $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'}$ *και* $\mu_\alpha = \mu_{\alpha'}$, *τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

3. *Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι* $\alpha = \alpha'$, $\upsilon_\beta = \upsilon_{\beta'}$ *και* $\upsilon_\gamma = \upsilon_{\gamma'}$, *τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*

4. *Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ* ($\hat{A} = 1\llcorner$) *και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε* $\Delta E \perp B\Gamma$, *που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.*

5. *Δίνεται κύκλος (Ο, R), οι ίσες χορδές του ΑΒ, ΓΔ και τα αποστήματά τους ΟΚ και ΟΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των ΒΑ και ΔΓ τέμνονται στο Μ, να αποδείξετε ότι:*
i) τα τρίγωνα ΜΟΚ και ΜΟΛ είναι ίσα,
ii) ΜΑ = ΜΓ και ΜΒ = ΜΔ.

Σύνθετα Θέματα

1. *Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ. Η διχοτόμος της γωνίας* $\hat{A}$ *τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ. Έστω Ε και Ζ οι προβολές του Δ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.*
i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔΒΕ και ΔΓΖ.
ii)Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$, *η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της ΒΓ στο σημείο Δ΄, με προβολές τα σημεία Ε΄, Ζ΄ στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.*
iii) Να αποδείξετε ότι ΕΕ΄ = ΑΓ και ΖΖ΄ = ΑΒ.

2. *Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α΄Β΄Γ΄ έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.*