

### Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν  $E_1$  είναι η προβολή της εστίας  $E$  της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  πάνω στην ασύμπτωτη  $y = \frac{b}{a}x$ , να αποδείξετε ότι
  - (i)  $(OE_1) = a$ ,      (ii)  $(EE_1) = b$ .
  
2. Έστω  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$  οι εφαπτόμενες της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  στις κορυφές της  $A$  και  $A'$ . Αν  $\Gamma$  και  $\Gamma'$  είναι τα σημεία στα οποία μια τρίτη εφαπτομένη της υπερβολής τέμνει τις  $\varepsilon$  και  $\varepsilon'$ , αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι
  - (i)  $(A\Gamma)(A'\Gamma') = b^2$  και
  - (iii) ο κύκλος με διάμετρο το  $\Gamma\Gamma'$  διέρχεται από τις εστίες της υπερβολής.
  
3. Έστω  $M_1(x_1, y_1)$  και  $M_2(x_2, y_2)$  δύο σημεία του δεξιού κλάδου της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ . Αν η ευθεία  $M_1M_2$  τέμνει τις ασύμπτωτες στα σημεία  $M_3(x_3, y_3)$  και  $M_4(x_4, y_4)$ , να αποδείξετε ότι  $(M_1M_3) = (M_2M_4)$ .
  
4. Από ένα σημείο  $M_1(x_1, y_1)$  της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  φέρνουμε παράλληλες προς τις ασύμπτωτες. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του σχηματιζόμενου παραλληλόγραμμου είναι σταθερό.
  
5. Να αποδείξετε ότι το συνημίτονο μιας από τις γωνίες των ασυμπτώτων της υπερβολής  $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$  δίνεται από τον τύπο  $\text{συν}\varphi = \frac{2 - \varepsilon^2}{\varepsilon^2}$ .
  
6. Έστω οι υπερβολές
 
$$C_1: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{και} \quad C_2: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \rho^2, \quad \rho > 1.$$

Αν  $A'_1, A_1$  και  $A'_2, A_2$  είναι οι κορυφές των  $C_1$  και  $C_2$  αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι από το  $A_2$  δεν άγονται εφαπτόμενες στη  $C_1$ , ενώ από το  $A_1$  άγονται εφαπτόμενες της  $C_2$ .