

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι το σημείο $M\left(\frac{\alpha(1-t^2)}{1+t^2}, \frac{2\beta t}{1+t^2}\right)$ ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $t \in \mathbf{R}$.
2. Να αποδείξετε ότι το σημείο τομής των ευθειών $\alpha y = \lambda \beta (\alpha + x)$ και $\lambda \alpha y = \beta (\alpha - x)$, $0 < \beta < \alpha$, ανήκει στην έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ για όλες τις τιμές του $\lambda \in \mathbf{R}^*$.
3. Αν $M(x, y)$ είναι ένα σημείο της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, να αποδείξετε ότι $(ME') = \alpha + ex$ και $(ME) = \alpha - ex$.
4. Αν d, d' είναι οι αποστάσεις των σημείων $\Gamma(0, \gamma)$ και $\Gamma'(0, -\gamma)$ από την εφαπτομένη της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$, να αποδείξετε ότι $d^2 + d'^2 = 2\alpha^2$.
5. Έστω $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ δύο σημεία της έλλειψης $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και τα σημεία $N_1(\epsilon x_1, 0)$ και $N_2(\epsilon x_2, 0)$. Να αποδείξετε ότι $(M_1 N_2) = (M_2 N_1)$.
6. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και ένα σημείο της M . Έστω επιπλέον, ο κύκλος $x^2 + y^2 = \alpha^2$ και το σημείο του N , που έχει την ίδια τετμημένη με το M . Από το M φέρνουμε παράλληλη προς την ON , που τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία Γ και Δ αντιστοίχως. Να αποδείξετε ότι $M\Gamma = \beta$ και $M\Delta = \alpha$.

7. Έστω ε και ε' οι εφαπτόμενες της έλλειψης $C : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$, $0 < \beta < a$ στις κορυφές της $A(a,0)$ και $A'(-a,0)$, αντιστοίχως, και ζ η εφαπτομένη της C σε ένα σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η ζ τέμνει τις ε και ε' στα σημεία Γ και Γ' , αντιστοίχως, να αποδείξετε ότι:
- (i) $(A\Gamma)(A'\Gamma') = \beta^2$
- (ii) ο κύκλος με διάμετρο το $\Gamma\Gamma'$ διέρχεται από τις εστίες της έλλειψης.
8. Έστω η έλλειψη $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{\beta^2} = 1$ και η εφαπτομένη στο σημείο της $M_1(x_1, y_1)$. Αν η εφαπτομένη τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία $\Gamma(p,0)$ και $\Delta(0,q)$, να αποδείξετε ότι $\frac{a^2}{p^2} + \frac{\beta^2}{q^2} = 1$.