

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την εξίσωση της έλλειψης σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις:

(i) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και μεγάλο άξονα 10

(ii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(0,-5)$ και $E(0,5)$ και μεγάλο άξονα 26

(iii) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-12,0)$ και $E(12,0)$ και εκκεντρότητα $\frac{12}{13}$

(iv) Όταν έχει εστίες τα σημεία $E'(-4,0)$ και $E(4,0)$ και διέρχεται από το σημείο

$$M\left(4, \frac{9}{5}\right)$$

(v) Όταν έχει εστίες στον άξονα $y'y$ και διέρχεται από τα σημεία $M_1(1,1)$ και

$$M_2\left(2, \frac{1}{2}\right).$$

2. Να βρείτε τα μήκη των αξόνων, τις εστίες και την εκκεντρότητα των ελλείψεων:

(i) $x^2 + 4y^2 = 4$

(ii) $169x^2 + 144y^2 = 24336$.

3. Να εγγράψετε στην έλλειψη $4x^2 + y^2 = 4$ τετράγωνο με πλευρές παράλληλες προς τους άξονες.

4. Αν E', E είναι οι εστίες και $B'B$ ο μικρός άξονας της έλλειψης $x^2 + 2y^2 = 4$, να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EBB'E'$ είναι τετράγωνο.

5. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες μιας έλλειψης στα άκρα μιας διαμέτρου της είναι παράλληλες. (Διάμετρος μιας έλλειψης λέγεται το τμήμα που συνδέει δύο σημεία της έλλειψης και διέρχεται από την αρχή των αξόνων).

6. Να βρεθούν οι εξισώσεις των εφαπτομένων της έλλειψης $3x^2 + y^2 = 4$, οι οποίες:

(i) είναι παράλληλες προς την ευθεία $y = -3x + 1$

(ii) είναι κάθετες στην ευθεία $y = \frac{1}{2}x$

(iii) διέρχονται από το σημείο $M(0,4)$.

7. Να αποδείξετε ότι οι εφαπτόμενες της έλλειψης $x^2 + 4y^2 = 100$ στα σημεία της $M_1(4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_2(-4\sqrt{5}, \sqrt{5})$, $M_3(-4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ και $M_4(4\sqrt{5}, -\sqrt{5})$ σχηματίζουν τετράγωνο με διαγώνιους τους άξονες $x'x$ και $y'y$.