3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Με τη βοήθεια του 1^{ου} κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2^{ο} και 3^{ο} κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο – ΓΠΓ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία πρός μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

Απόδειξη

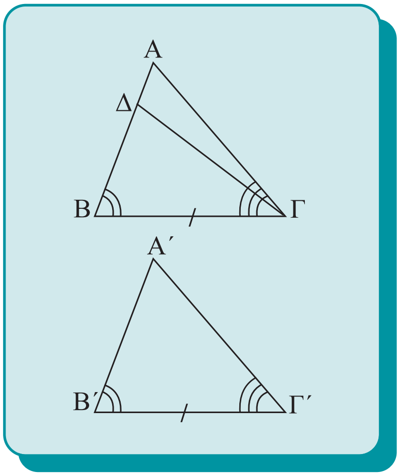
Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ (σχ.16) έχουν ΒΓ = Β′Γ′, $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και ΑΒ = Α′Β′. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α′Β′, π.χ. ΑΒ > Α′Β′. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην ΑΒ, ώστε να είναι ΒΔ = Β′Α′. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΔ = Β′Α′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}'$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $B\hat{\Gamma}\Delta = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι εσωτερικό σημείο της γωνίας $A\hat{\Gamma}B$ και επομένως $B\hat{\Gamma}\Delta < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α′Β′ , άρα ΑΒ = Α′Β′. Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ και Α′Β′Γ έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΑΒ = Α′Β′ και $\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

* Σημείωση: *Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι (σελ. 36).*

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.



Σχήμα 16

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο – ΠΠΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

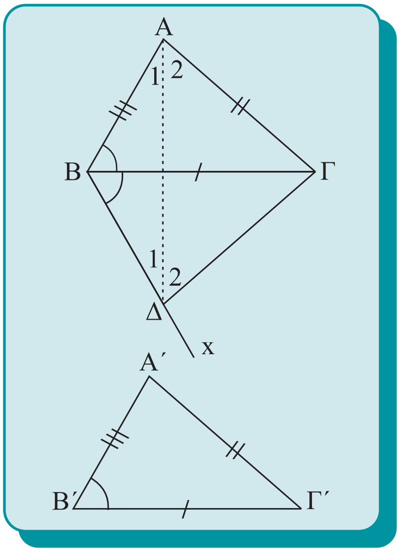
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΒΓ = Β′Γ′, ΓΑ = Γ′Α′ (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια.

Θεωρούμε την ημιευθεία Βx, ώστε $\Gamma\hat{B}x = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ, ώστε ΒΔ = Α′Β′. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β′Γ′, ΒΔ = Α′Β′ και $\Gamma\hat{B}\Delta = \hat{B}'$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει ότι ΓΔ = Γ′Α′ και $\hat{\Delta} = \hat{A}'$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.



Σχήμα 17

Επειδή ΒΔ = Α′Β′ και Α′Β′ = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{Α}_1 = \hat{Δ}_1 \quad (1).$$

Επίσης, αφού ΓΔ = Α′Γ′ και Α′Γ′ = ΑΓ, προκύπτει ότι

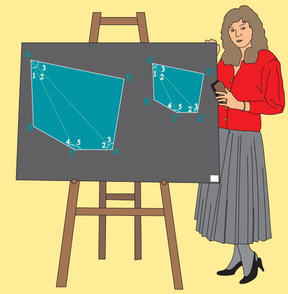
$$\hat{Α}_2 = \hat{Δ}_2 \quad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{Α}$ και $\hat{Δ}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{Α} = \hat{Δ}$. Επειδή $\hat{Δ} = \hat{Α}'$, έχουμε $\hat{Α} = \hat{Α}'$, που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3ου Κριτηρίου:

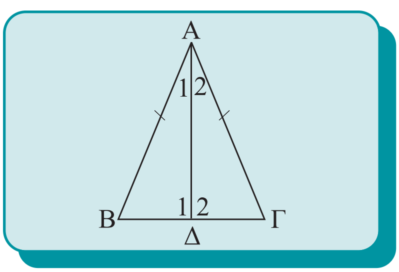
i) $\hat{B} > 90°$ και $\hat{B}' > 90°$.
ii) $\hat{B} = 90°$ και $\hat{B}' = 90°$.



Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

Πόρισμα Ι

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.



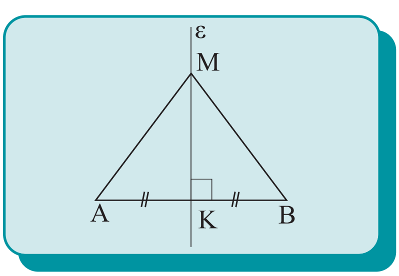
Σχήμα 18

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2$, και $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.

Πόρισμα ΙΙ

Κάθε σημείο πού ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.



Σχήμα 19

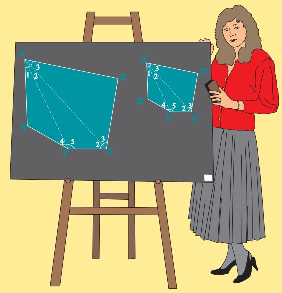
Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι **η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.**

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου.

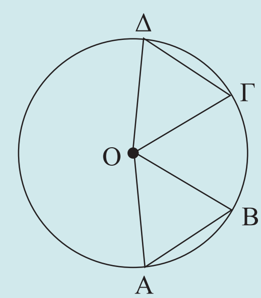


Πορισμα ΙΙΙ

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{ΑΒ}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20) έχουν: ΟΑ = ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ (= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα. Επομένως, $Α\hat{Ο}Β = Γ\hat{Ο}Δ$, οπότε $\overset{\frown}{ΑΒ} = \overset{\frown}{ΓΔ}$.



Σχήμα 20

Πορισμα IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

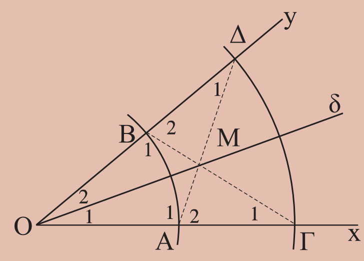
Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),**
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),**
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (O,ρ), (O,R) με ρ<R (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:
(i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,
(ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,
(iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,
(iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ (= ρ), ΟΓ = ΟΔ(= R) και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.

(ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180° - \hat{A}_2 = 180° - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$. Επομένως, τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν ΑΓ = ΒΔ, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

(iii) Από το (ii) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ και ΟΜ κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.

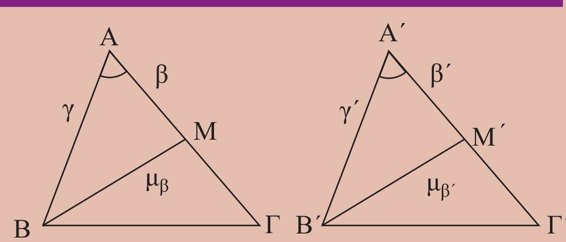
(iv) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ (σχ.22). Αυτά έχουν ΑΒ = Α΄Β΄, ΒΜ = Β΄Μ΄ (από την υπόθεση) και ΑΜ =Α΄Μ΄, ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α΄Γ΄. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α΄Β΄Μ΄ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν β = β΄, γ = γ΄ και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. *Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.*

3. *Συμπληρώστε τα κενά:*

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ....

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ....

iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν ....

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν ....

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι΄ το σημείο τομής των διχοτόμων Α΄Δ΄ και Β΄Ε΄ του Α΄Β΄Γ΄ να αποδείξετε ότι:*

i) $A\Delta = A'\Delta'$ και $BE = B'E'$

ii) $AI = A'I'$ και $BI = B'I'$.

2. *Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

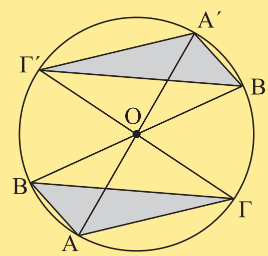
ii) $\alpha = \alpha'$ και $\gamma = \gamma'$.

3. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.*

2. *Αν ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.*



3. *Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι $AB = \Gamma\Delta$ και $\hat{B} = \hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$.*

Σύνθετα θέματα

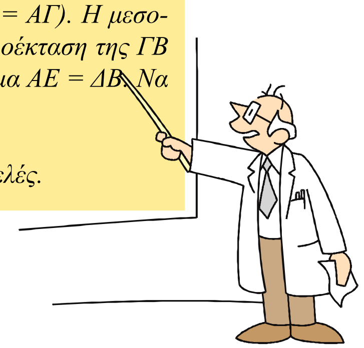
1. *Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α΄Μ΄ και η αντίστοιχη διχοτόμος Β΄Δ΄ του Α΄Β΄Γ΄ τέμνονται στο Θ΄. Να αποδείξετε ότι: i) $B\Delta = B'\Delta'$, ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$, iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα, iv) $A\Theta = A'\Theta'$ και $\Theta\Delta = \Theta'\Delta'$.*

2. *Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.*

3. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.



3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.