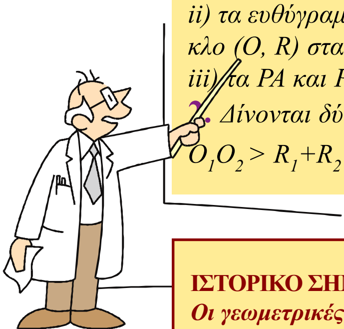
φουμε κύκλο με διάμετρο ΟΑ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Α, ΑΟ) και τον κύκλο με διάμετρο ΟΒ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (Ο, R) και εξωτερικό σημείο του Ρ, ώστε ΟΡ <2R. Γράφουμε τον κύκλο (Ο, 2R). Να αποδείξετε ότι:*
i) ο κύκλος (Ο,2R) τέμνει τον κύκλο (Ρ, ΡΟ) σε δύο σημεία Γ και Δ,
ii) τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΟΔ τέμνουν τον κύκλο (Ο, R) στα σημεία Α και Β,
iii) τα ΡΑ και ΡΒ εφάπτονται στον (Ο, R).



2. *Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1+R_2 > 2R_2$.*
i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.
ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία Μ, Μ′ και τον (O_2) στα σημεία Ν, Ν′ αντίστοιχα με τα Μ, Ν μεταξύ των Μ′, Ν′. Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου Α, Β τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. *Ένας κύκλος κέντρου Κ είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι $K\hat{P}\Lambda = 90°$.*

4. *Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;*

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαιρούνται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).
Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην § 2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.

- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.

- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

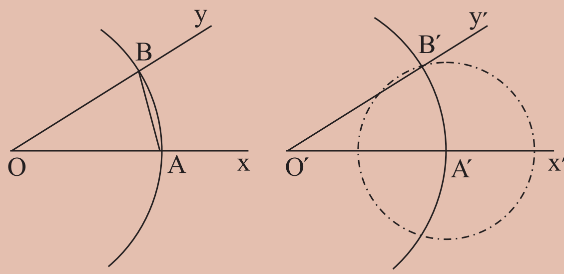
*Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.*

3.17 Απλές γεωμετρικές κατασκευές

Στην παράγραφο αυτή παρουσιάζουμε ορισμένες γεωμετρικές κατασκευές με τις οποίες κατοχυρώνουμε κατασκευαστικά στοιχειώδη γεωμετρικά αντικείμενα και διαδικασίες.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Δίνεται γωνία $x\hat{O}y$ και η ημιευθεία $O'x'$. Να κατασκευασθεί γωνία ίση με τη $x\hat{O}y$ η οποία έχει ως μια πλευρά, την $O'x'$ και κορυφή το O'.



Σχήμα 67

• Κατασκευή

Καθιστούμε τη γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.67) επίκεντρη γράφοντας κύκλο με κέντρο O και τυχαία ακτίνα ρ. Έστω $\overset{\frown}{AB}$ το αντίστοιχο τόξο της. Με κέντρο O′ και ακτίνα την ίδια, γράφουμε άλλον κύκλο που τέμνει την O′x′ στο A′. Ακολούθως γράφουμε τον κύκλο (A′, AB) του οποίου ένα κοινό σημείο με τον (O′,ρ) είναι το B′. Φέρουμε την ημιευθεία O′B′. Η γωνία $x'\hat{O}'B'$, δηλαδή η $x'\hat{O}'y'$ είναι η ζητούμενη.

• Απόδειξη

Οι γωνίες $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}'y'$ είναι ίσες, γιατί είναι επίκεντρες στους ίσους κύκλους (O,ρ), (O′,ρ) και βαίνουν στα ίσα τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{A'B'}$ αντίστοιχα. (§ 2.18)

• Διερεύνηση

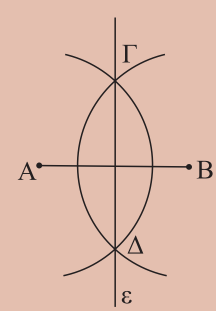
Για να έχει το πρόβλημα λύση, θα πρέπει οι κύκλοι (O′,ρ) και (A′, AB) να τέμνονται. Αυτό όμως, συμβαίνει πάντοτε, επειδή για τη διάκεντρό τους $O'A' = \rho$ ισχύει: $\rho - AB < \rho < \rho + AB$ (λόγω της τριγωνικής ανισότητας στο τρίγωνο OAB). Μια δεύτερη λύση του προβλήματος αντιστοιχεί στο δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (O′,ρ) και (A′, AB).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος.

• Κατασκευή

Έστω τμήμα AB (σχ.68). Με κέντρα τα άκρα του A, B και ακτίνα $\rho > \frac{AB}{2}$ γράφουμε δύο ίσους κύκλους. Αν Γ, Δ είναι τα κοινά σημεία των κύκλων αυτών, η ευθεία ε που ορίζουν είναι η ζητούμενη.



Σχήμα 68

• Απόδειξη

Η ευθεία ε είναι κοινή χορδή ίσων κύκλων, επομένως είναι κάθετη στη διάκεντρο AB (§3.16)

• Διερεύνηση

Για να έχει το πρόβλημα λύση θα πρέπει οι κύκλοι (A, ρ) και (B, ρ) να τέμνονται. Αυτό όμως ισχύει, αφού η διάκεντρό τους AB ικανοποιεί την $\rho - \rho < AB < \rho + \rho$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ: *Με την παραπάνω κατασκευή βρίσκουμε και το μέσο ενός ευθύγραμμου τμήματος.*

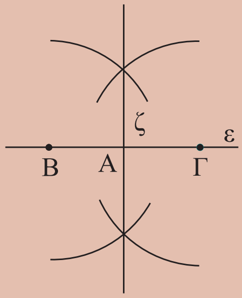
Αρκετές φορές τα παραπάνω βήματα: κατασκευή, απόδειξη, διερεύνηση μπορεί να παρουσιάζονται ενοποιημμένα.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Δίνεται ευθεία ε και σημείο Α. Να κατασκευασθεί ευθεία που να διέρχεται από το Α κάθετη στην ε, όταν:
(i) το Α είναι σημείο της ευθείας ε,
(ii) το Α δεν είναι σημείο της ε.

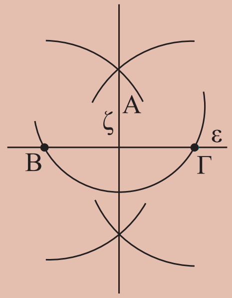
Λύση

(i) Με κέντρο το Α (σχ.69) και τυχαία ακτίνα γράφουμε κύκλο, ο οποίος τέμνει την ε στα σημεία Β και Γ. Έτσι το Α έγινε μέσο του τμήματος ΒΓ και επομένως η ζητούμενη κάθετος είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΒΓ (προηγούμενη κατασκευή).



Σχήμα 69

(ii) Με κέντρο το Α (σχ.70) και κατάλληλη ακτίνα γράφουμε κύκλο που τέμνει την ευθεία ε στα Β και Γ. Η μεσοκάθετος ζ του τμήματος ΒΓ, που κατασκευάζεται όπως προηγουμένως, είναι η ζητούμενη κάθετος.
Πράγματι, επειδή ΑΒ = ΑΓ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου, η μεσοκάθετος της χορδής ΒΓ διέρχεται από το Α.



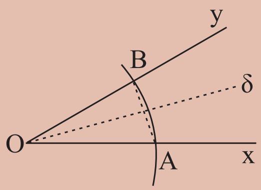
Σχήμα 70

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 4

Να κατασκευασθεί η διχοτόμος μιας γωνίας.

Λύση

Έστω γωνία $x\hat{O}y$ (σχ.71). Με κέντρο το Ο και τυχαία ακτίνα, γράφουμε κύκλο, που τέμνει τις πλευρές της γωνίας στα Α, Β αντίστοιχα. Φέρουμε τη μεσοκάθετο δ (Πρόβλημα 2) της χορδής ΑΒ που είναι και η ζητούμενη διχοτόμος.
Πράγματι η ευθεία δ, ως μεσοκάθετος χορδής κύκλου, διέρχεται από το κέντρο του κύκλου και διχοτομεί το αντίστοιχο τόξο $\overset{\frown}{AB}$ της γωνίας $x\hat{O}y$ (§ 3.6). Επομένως είναι διχοτόμος της.



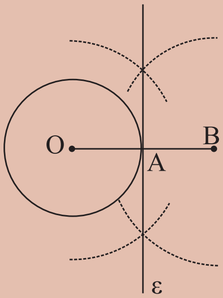
Σχήμα 71

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να κατασκευασθεί η εφαπτομένη ενός κύκλου (Ο,ρ) σε ένα σημείο του Α.

Λύση

Στην προέκταση της ακτίνας ΟΑ (σχ.72) παίρνουμε το σημείο Β, ώστε να είναι ΑΒ = ΟΑ. Στη συνέχεια φέρουμε τη μεσοκάθετο του ΟΒ που είναι η εφαπτομένη του κύκλου, γιατί είναι κάθετη στην ακτίνα στο άκρο της Α.



Σχήμα 72

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: *Για την κατασκευή των εφαπτομένων από σημείο εκτός κύκλου* *βλέπε σελ 137.*

3.18 Βασικές κατασκευές τριγώνων

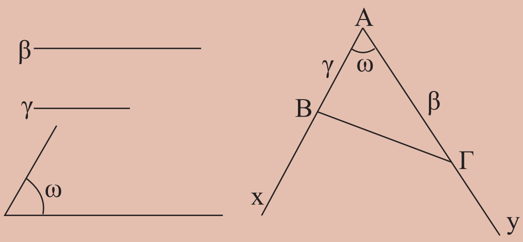
Σε αντιστοιχία με τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (§3.2-3.4) έχουμε τις επόμενες γεωμετρικές κατασκευές.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να κατασκευαστεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΑΒ = γ, ΑΓ = β και η περιεχόμενη γωνία $\hat{A}$ = ω.

Λύση

Με πλευρά μια ημιευθεία Αx κατασκευάζουμε (§ 3.17) γωνία $x\hat{A}y$ = ω (σχ.73). Στις πλευρές Αx, Αy παίρνουμε, με το διαβήτη, τα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, ώστε ΑΒ = γ και ΑΓ = β. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 73

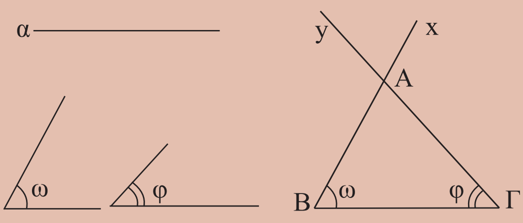
Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΑΓ = γ, ΑΓ = β και $\hat{A}$ = ω. Με τον περιορισμό 0° < ω < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνεται η πλευρά ΒΓ=α και οι προσκείμενες σε αυτή γωνίες $\hat{B}$ = ω και $\hat{Γ}$ = φ.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α και με κορυφές τα Β, Γ (σχ.74) κατασκευάζουμε, προς το ίδιο μέρος της ΒΓ, γωνίες $Γ\hat{B}x$ = ω και $B\hat{Γ}y$ = φ. Οι πλευρές Βx, Γy των γωνιών αυτών τέμνονται στο σημείο Α. Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 74

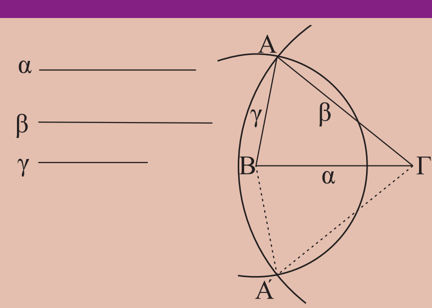
Πράγματι, από την κατασκευή, το τρίγωνο ΑΒΓ έχει ΒΓ = α, $\hat{B}$ = ω και $\hat{Γ}$ = φ. Με τον περιορισμό 0° < ω + φ < 180° (§3.10 Πορίσματα (ii)) το πρόβλημα έχει πάντα μοναδική λύση. Στο επόμενο κεφάλαιο (§4.2) θα δούμε ότι ο περιορισμός ω + φ < 180° εξασφαλίζει την τομή των ημιευθειών Βx και Γy.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Να κατασκευασθεί τρίγωνο ΑΒΓ, του οποίου δίνονται οι πλευρές ΒΓ = α, ΑΓ = β και ΑΒ = γ.

Λύση

Θεωρούμε τμήμα ΒΓ = α (σχ.75) και γράφουμε τους κύκλους (Β,γ) και (Γ,β). Αν οι κύκλοι τέμνονται και Α είναι το ένα από τα σημεία τομής τους, το τρίγωνο ΑΒΓ είναι το ζητούμενο.



Σχήμα 75

Πράγματι το τρίγωνο ΑΒΓ, από την κατασκευή, έχει ΒΓ = α, ΑΒ = γ ως ακτίνα του (Β,γ) και ΑΓ = β ως ακτίνα του (Γ, β).

Για να έχει λύση το πρόβλημα, πρέπει οι κύκλοι (Β,γ) και (Γ,β) να τέμνονται, το οποίο συμβαίνει (§3.16) όταν $\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma$ $(\beta > \gamma)$. Αν Α′ είναι το δεύτερο κοινό σημείο των κύκλων (Β, γ) και (Γ, β), το τρίγωνο Α′ΒΓ είναι ίσο με το ΑΒΓ, επομένως δεν αποτελεί νέα λύση του προβλήματος, αφού τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΗΜΑΝΤΙΚΗ ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από την παραπάνω κατασκευή προκύπτει ότι τρία τμήματα α,β,γ είναι πλευρές τριγώνου αν και μόνον αν ισχύει $\beta-\gamma<\alpha<\beta+\gamma$ $(\beta \geq \gamma)$. *Αν υποθέσουμε ότι* $\alpha>\beta$ *και* $\alpha>\gamma$, *η τελευταία διπλή ισότητα είναι ισοδύναμη με την* $\alpha<\beta+\gamma$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πώς θα χωρισθεί με κανόνα και διαβήτη ένα ευθύγραμμο τμήμα σε τέσσερα ίσα τμήματα;*

2. *Πώς θα βρεθεί με κανόνα και διαβήτη το μέσο ενός τόξου δοσμένου κύκλου;*

3. *Πώς θα βρεθεί το κέντρο ενός κύκλου που έχει γραφεί με ένα νόμισμα;*

4. *Τα τμήματα α, β, γ με α >β και α >γ είναι πλευρές τριγώνου όταν:*

α. $\alpha=\beta+\gamma$ *β.* $\alpha>\beta+\gamma$ *γ.* $\alpha<\beta+\gamma$ *δ.* $\alpha<2(\beta+\gamma)$

ε. Τίποτε από τα προηγούμενα.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να κατασκευάσετε γεωμετρικά γωνία 45°.*

2. *Να χωρίσετε δοσμένη γωνία σε τέσσερις ίσες γωνίες.*

3. *Να κατασκευάσετε ισόπλευρο τρίγωνο με πλευρά γνωστό τμήμα α.*

4. *Να κατασκευάσετε ισοσκελές τρίγωνο του οποίου δίνονται η βάση α και το αντίστοιχο σε αυτήν ύψος υ.*

5. *Να κατασκευάσετε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{A} = 90°$, *όταν δίνονται:*

i) $AB = \gamma$ *και* $A\Gamma = \beta$,

ii) $AB = \gamma$ *και* $B\Gamma = \alpha$,

όπου α, β, γ γνωστά τμήματα.

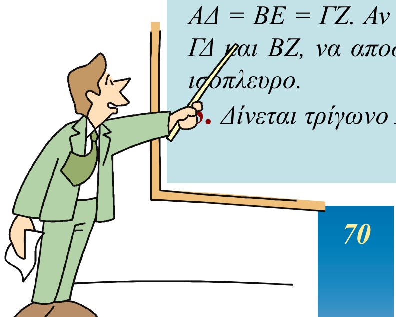
ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. *Έστω τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ τέτοια, ώστε* $A\Gamma = A'\Gamma'$, $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$ *και* $\hat{B} + \hat{B}' = 2\llcorner$. *i) Να αποδείξετε ότι* $AB = A'B'$, *ii) Διατυπώστε λεκτικά την άσκηση αυτή.*

2. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και με πλευρές τις ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ κατασκευάζουμε εξωτερικά του ΑΒΓ τρία ισόπλευρα τρίγωνα Α′ΒΓ, ΑΒ′Γ και ΑΒΓ′. Να αποδείξετε ότι* $AA' = BB' = \Gamma\Gamma'$.

3. *Αν ΟΚ, ΟΛ είναι αντίστοιχα τα αποστήματα των χορδών ΑΒ, ΓΔ κύκλου (Ο,R), να αποδείξετε ότι* $AB < \Gamma\Delta$, *αν και μόνον αν* $OK > O\Lambda$.

4. *Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ, Ε, Ζ των πλευρών του ΑΒ, ΒΓ και ΓΑ αντίστοιχα, ώστε* $A\Delta = BE = \Gamma Z$. *Αν Κ, Λ, Μ τα σημεία τομής των ΑΕ, ΓΔ και ΒΖ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*



5. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με* $\hat{B} < 1\llcorner$ *και* $A\Gamma = 2AB$. *Να αποδείξετε ότι* $\hat{\Gamma} < \dfrac{\hat{A}}{2}$.

6. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με* $AB = \dfrac{B\Gamma}{2}$ *και* $\hat{\Gamma} = \dfrac{\hat{B}}{2}$. *Να αποδείξετε ότι* $\hat{A} = 1\llcorner$.

7. *Να αποδείξετε ότι δύο τρίγωνα τα οποία έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις αντίστοιχες διαμέσους που περιέχονται στις πλευρές αυτές ίσες μία προς μία είναι ίσα.*

8. *Δίνεται μια γωνία* $x\hat{O}y$ *και δύο εσωτερικά της σημεία Α και Β. Έστω Α′ το συμμετρικό του Α ως προς την Οx και Β′ το συμμετρικό του Β ως προς την Οy. Αν Μ, Ν είναι τυχαία σημεία των Οx, Οy αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι* $AM+MN+NB=A'M+MN+NB'$.

Με τη βοήθεια της σχέσης αυτής να βρείτε τις θέσεις των Μ, Ν, για τις οποίες το άθροισμα $AM + MN + NB$ *είναι το μικρότερο δυνατό.*