Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.*

2. *Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = 90°$.*

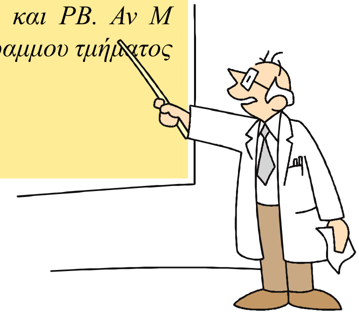
3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.*

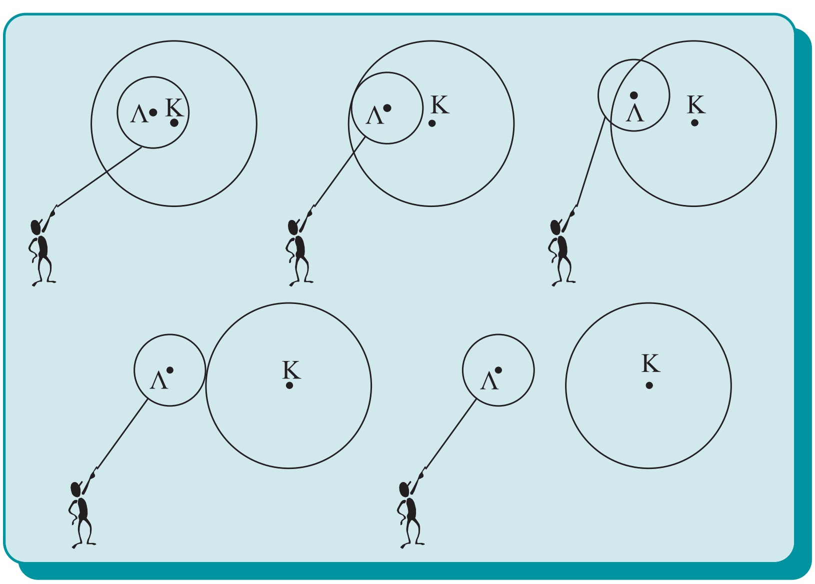
2. *Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι τριπλάσια της $B\hat{M}\Gamma$.*

3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.*



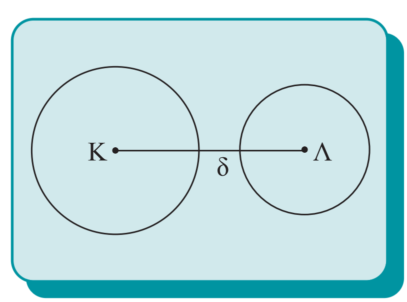
3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).



Σχήμα 61α

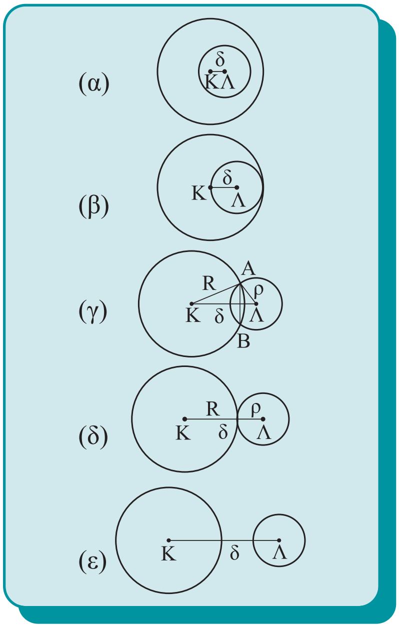
Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται ***διάκεντρος*** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β). Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:



Σχήμα 61β

• **Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία**

(i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν



Σχήμα 62

και μόνο αν **$\delta < R - \rho$** (σχ.62α).

(ii) Οι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) βρίσκεται ο ένας στο **εξωτερικό** του άλλου, αν και μόνο αν **$\delta > R + \rho$** (σχ.62ε).

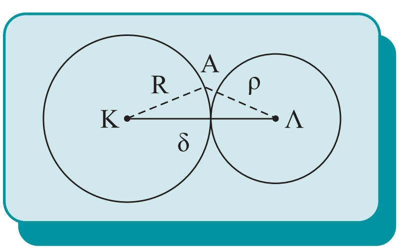
• **Εφαπτόμενοι κύκλοι**

(i) Οι κύκλοι **εφάπτονται εσωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο εσωτερικό του (Κ, R), αν και μόνο αν **$\delta = R - \rho$** (σχ.62β).

(ii) Οι κύκλοι **εφάπτονται εξωτερικά**, δηλαδή έχουν **ένα** κοινό σημείο και ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου, αν και μόνο αν **$\delta = R + \rho$** (σχ.62δ).

Το κοινό σημείο δύο εφαπτόμενων κύκλων λέγεται ***σημείο επαφής*** και είναι σημείο της διακέντρου.

Πράγματι, αν το σημείο επαφής Α (σχ.63) δεν είναι σημείο της διακέντρου, τότε από το τρίγωνο ΑΚΛ έχουμε $ΚΛ < ΚΑ + ΑΛ$, δηλαδή $\delta < R + \rho$, που είναι άτοπο.



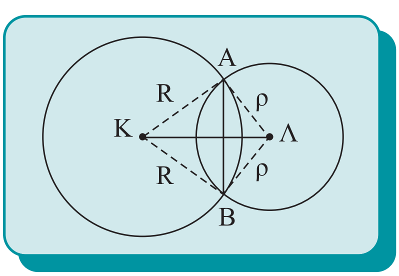
Σχήμα 63

• **Τεμνόμενοι κύκλοι**

Οι κύκλοι **τέμνονται**, δηλαδή έχουν **δύο** κοινά σημεία, αν και μόνο αν **$R - \rho < \delta < R + \rho$** (σχ.62γ). Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ που ενώνει τα κοινά σημεία λέγεται ***κοινή χορδή*** των δύο κύκλων. Ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

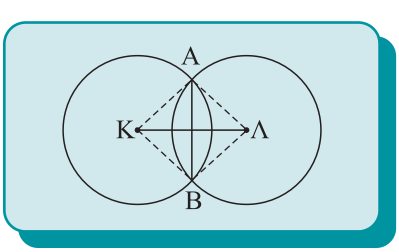
Η διάκεντρος δύο τεμνόμενων κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής τους.



Σχήμα 64

Απόδειξη

Έστω οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) του σχ.64 και Α, Β τα σημεία τομής τους. Επειδή $ΚΑ = ΚΒ = R$, το σημείο Κ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Όμοια από την $ΛΑ = ΛΒ = \rho$ προκύπτει ότι και το Λ είναι σημείο της μεσοκαθέτου του ΑΒ. Άρα, η ΚΛ είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής ΑΒ του κύκλου.



Σχήμα 65

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Στην περίπτωση που οι τεμνόμενοι κύκλοι (Κ, R) και (Λ, ρ) (σχ.65) είναι ίσοι, δηλαδή έχουν $R = \rho$, τότε και η κοινή χορδή είναι μεσοκάθετος της διακέντρου.

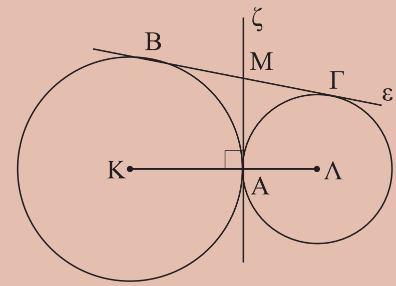
Πράγματι, επειδή $R = \rho$, θα είναι $ΑΚ = ΑΛ$ και $ΒΚ = ΒΛ$. Άρα τα Α και Β είναι σημεία της μεσοκαθέτου του ΚΛ και επομένως η κοινή χορδή ΑΒ είναι μεσοκάθετος της διακέντρου ΚΛ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δύο κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά στο Α (σχ.66). Μία ευθεία ε εφάπτεται και στους δύο κύκλους στα Β, Γ αντίστοιχα, όπως στο σχ.66. Να αποδειχθεί ότι:

(i) Η εφαπτομένη ζ του ενός κύκλου στο Α είναι και εφαπτομένη του άλλου.

(ii) Η ευθεία ζ διχοτομεί το τμήμα ΒΓ.



Σχήμα 66

Απόδειξη

(i) Έστω ότι η ζ εφάπτεται στον κύκλο (Κ) στο Α. Τότε ζ⊥ΚΑ (1).
Επειδή όμως οι κύκλοι εφάπτονται, το Α είναι σημείο της διακέντρου ΚΛ, οπότε από την (1) προκύπτει ότι ζ⊥ΑΛ, επομένως η ευθεία ζ είναι και εφαπτομένη του κύκλου (Λ).

(ii) Έστω Μ το σημείο τομής της ζ με την ε. Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Κ) και ΜΑ = ΜΓ, ως εφαπτόμενα τμήματα του (Λ). Από τις ισότητες αυτές προκύπτει ότι ΜΒ = ΜΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

*Η ευθεία ε του παραπάνω σχήματος, που εφάπτεται και στους δύο κύκλους και τους αφήνει προς το ίδιο μέρος της λέγεται **κοινή εξωτερική εφαπτομένη**, ενώ η ευθεία ζ που έχει τους κύκλους στους οποίους εφάπτεται εκατέρωθεν αυτής λέγεται **κοινή εσωτερική εφαπτομένη**.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Αν (Κ, R) και (Λ, ρ) είναι δύο κύκλοι που έχουν διαφορετικά κέντρα και R > ρ, ΚΛ = δ, να αντιστοιχίσετε κάθε φράση της πρώτης στήλης με την αντίστοιχη σχέση στη δεύτερη στήλη.*

Στήλη Α	*Στήλη Β*
α. Ο κύκλος (Λ,ρ) είναι εσωτερικός του (Κ,R).	*1. δ>R+ρ*
β. Ο κύκλος (Λ,ρ) εφάπτεται εσωτερικά του (Κ,R).	*2. δ=R+ρ*
γ. Οι κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) τέμνονται.	*3. δ= R–ρ*
δ. Οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά.	*4. δ< R–ρ*
ε. Κάθε κύκλος είναι εξωτερικός του άλλου.	*5. 2δ= R–ρ*
	6. ρ<δ<R
	7. 2δ=Rρ
	8. R–ρ<δ<R+ρ

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) Η διάκεντρος δύο κύκλων είναι μεσοκάθετος της κοινής χορδής. Σ Λ

ii) Η κοινή χορδή δύο ίσων κύκλων είναι μεσοκάθετος της διακέντρου. Σ Λ

iii) Το σημείο επαφής δύο εφαπτόμενων κύκλων είναι σημείο της διακέντρου. Σ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να προσδιορισθούν οι σχετικές θέσεις των κύκλων (Κ, ρ) και (Λ, 2ρ) αν*

i) $ΚΛ = \frac{ρ}{2}$,

ii) $ΚΛ = ρ$,

iii) $ΚΛ = 2ρ$,

iv) $ΚΛ = 3ρ$,

v) $ΚΛ = 4ρ$.

2. *Δίνεται κύκλος (Ο, ρ) και μια ακτίνα του ΟΑ. Γρά-*

φουμε κύκλο με διάμετρο ΟΑ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;

3. *Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ και το μέσο του Ο. Γράφουμε τον κύκλο (Α, ΑΟ) και τον κύκλο με διάμετρο ΟΒ. Ποια είναι η σχετική θέση των δύο κύκλων;*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Δίνεται κύκλος (O, R) και εξωτερικό σημείο του P, ώστε OP <2R. Γράφουμε τον κύκλο (O, 2R). Να αποδείξετε ότι:*

i) ο κύκλος (O,2R) τέμνει τον κύκλο (P, PO) σε δύο σημεία Γ και Δ,

ii) τα ευθύγραμμα τμήματα ΟΓ και ΟΔ τέμνουν τον κύκλο (O, R) στα σημεία Α και Β,

iii) τα ΡΑ και ΡΒ εφάπτονται στον (O, R).

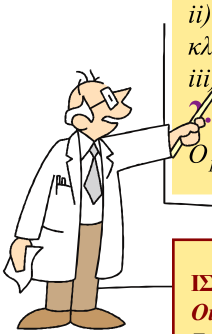
2. *Δίνονται δύο κύκλοι (O_1, R_1) και (O_2, R_2) με $O_1O_2 > R_1+R_2 > 2R_2$.*

i) Να αποδείξετε ότι ο ένας βρίσκεται στο εξωτερικό του άλλου.

ii) Εστω ότι η διάκεντρος τέμνει τον (O_1) στα σημεία Μ, Μ′ και τον (O_2) στα σημεία Ν, Ν′ αντίστοιχα με τα Μ, Ν μεταξύ των Μ′, Ν′. Να αποδείξετε ότι $MN \leq AB \leq M'N'$, όπου Α, Β τυχαία σημεία των κύκλων (O_1) και (O_2) αντίστοιχα.

3. *Ένας κύκλος κέντρου Κ είναι εξωτερικός ενός άλλου κύκλου κέντρου Λ. Μια κοινή εξωτερική εφαπτομένη και μια κοινή εσωτερική εφαπτομένη των δύο κύκλων τέμνονται στο Ρ. Να αποδείξετε ότι $K\hat{P}\Lambda = 90°$.*

4. *Μπορείτε να ζωγραφίσετε 12 κύκλους, ώστε ο καθένας από αυτούς να εφάπτεται σε 5 ακριβώς από τους δοσμένους κύκλους;*



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι γεωμετρικές κατασκευές

Τα πρώτα προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών απαντώνται στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη. Οι μαθηματικές προτάσεις διαιρούνται σε «θεωρήματα», όπου ζητείται να αποδειχθεί ότι ένα αντικείμενο έχει μια ορισμένη ιδιότητα και σε «προβλήματα», όπου ζητείται να κατασκευασθεί κάποιο αντικείμενο που να έχει ορισμένη ιδιότητα. Στα «Στοιχεία» οι κατασκευές στηρίζονται στα τρία πρώτα αιτήματα του Βιβλίου Ι (βλ. Τα μη επιλύσιμα γεωμετρικά προβλήματα της αρχαιότητας).

Ως τα τέλη του 4ου αι. πρέπει να είχε εδραιωθεί η πεποίθηση ότι ορισμένα προβλήματα, όπως π.χ. το πρόβλημα του διπλασιασμού του κύβου δεν είναι επιλύσιμο με τα επιτρεπτά τότε κατασκευαστικά εργαλεία. Έτσι εμφανίζεται η πρώτη ιεράρχηση των προβλημάτων με βάση τα επιτρεπτά κατασκευαστικά εργαλεία επιλυσιμότητάς τους. Ως επίπεδα προβλήματα θεωρούνται αυτά που μπορούν να κατασκευαστούν με κανόνα και διαβήτη, στερεά προβλήματα είναι εκείνα που λύνονται με τη βοήθεια κωνικών τομών, και γραμμικά προβλήματα είναι όλα τα υπόλοιπα. Ο Πάππος μάλιστα θεωρούσε σοβαρό λάθος τη λύση ενός επίπεδου προβλήματος με τη βοήθεια κωνικών τομών.

Γεωμετρικές κατασκευές

Στην § 2.7 αναφέραμε την έννοια της γεωμετρικής κατασκευής. Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος κατασκευής ακολουθεί τα εξής στάδια: την **κατασκευή** (ή **σύνθεση**), την **απόδειξη** και τη **διερεύνηση**.

- Η **κατασκευή** είναι όλες εκείνες οι ενέργειες που οδηγούν στη σχεδίαση του σχήματος.

- Η **απόδειξη** είναι η επιβεβαίωση ότι το σχήμα που κατασκευάστηκε έχει ως στοιχεία τα δοσμένα.

- Η **διερεύνηση** είναι η αναγραφή όλων εκείνων των συνθηκών, που πρέπει να ικανοποιούν τα δεδομένα, ώστε το πρόβλημα να έχει λύση. Στη διερεύνηση εξετάζεται επίσης και το πλήθος των λύσεων του προβλήματος.

ΣΧΟΛΙΟ

*Όταν η κατασκευή του ζητούμενου σχήματος δεν είναι άμεσα φανερή, τότε, πριν από την κατασκευή κάνουμε, ως βοηθητικό βήμα, και τη λεγόμενη **ανάλυση**. Σε προβλήματα επόμενων κεφαλαίων θα χρησιμοποιήσουμε και την ανάλυση.*