ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. *Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες*

i) ΑΒ=ΑΓ⇔ ....

ii) ΑΒ>ΑΓ⇔................

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) ΑΒ>ΑΚ	*Σ*	*Λ*
ii) ΑΒ=ΑΚ	*Σ*	*Λ*
iii) ΑΒ<ΑΚ	*Σ*	*Λ*

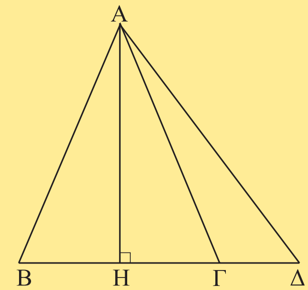
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) ΔΕ < ΕΒ,

ii) ΔΕ < ΒΓ.

2. *Στο παρακάτω σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.*



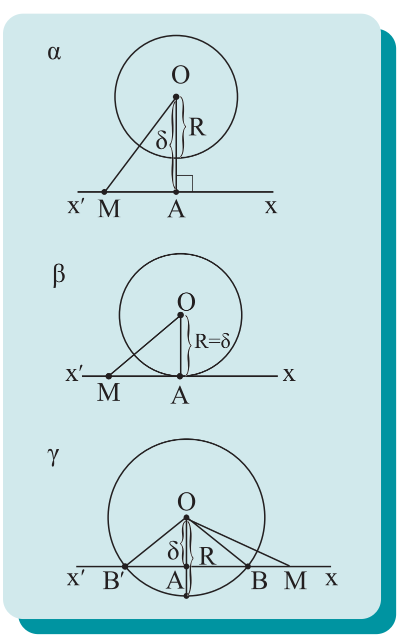
3. *Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.*

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Σχήμα 58

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

• Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.

• Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο,R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x΄x εφάπτεται του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.
Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

• Έστω $\delta < R$ (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου. Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε $AM = R$. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού $OM > AM = R$. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx′ έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β′.

Επομένως, η x′x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x′x, λέγεται ***τέμνουσα του κύκλου*** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία ***τομής*** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία ***τέμνει*** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- **Αν $\delta>R$, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta=R$, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.**
- **Αν $\delta<R$, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.**

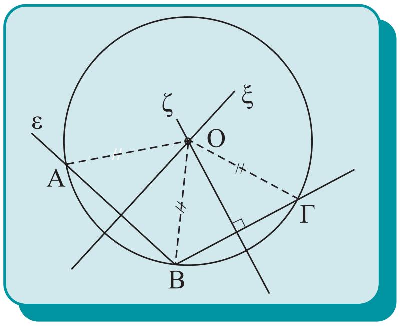
Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα I

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή ΟΑ = ΟΒ (= ρ) και ΟΒ = ΟΓ (= ρ), οι μεσοκάθετοι ξ,ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.



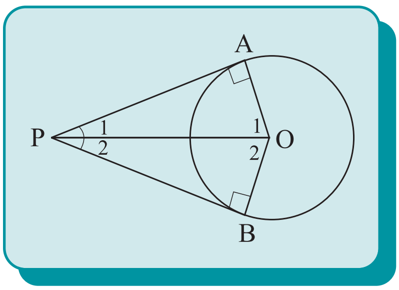
Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

Έστω ένας κύκλος (Ο, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο Ρ. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το Ρ φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν Α, Β είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα ΡΑ και ΡΒ λέγονται ***εφαπτόμενα τμήματα*** του κύκλου από το σημείο Ρ και η ευθεία ΡΟ ***διακεντρική ευθεία*** του σημείου Ρ. Ισχύει το εξής θεώρημα:



Σχήμα 60

Θεώρημα ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα ΑΟΡ και ΒΟΡ (σχ.60) έχουν $\hat{A}=\hat{B}=90°$, ΟΡ κοινή και ΟΑ = ΟΒ (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε ΡΑ = ΡΒ.

Πορισμα

Αν Ρ είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,

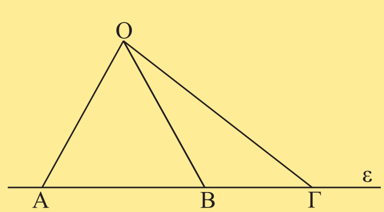
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

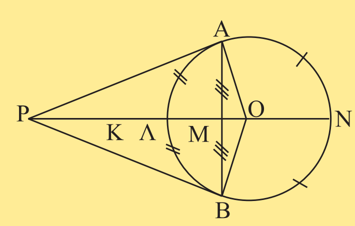
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;*

2. *Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*



3. *Στο παρακάτω σχήμα τα ΡΑ, ΡΒ είναι εφαπτόμενα τμήματα, η ΡΚ διχοτόμος της $A\hat{P}B$, τα Λ, Ν μέσα των τόξων $\overset{\frown}{A\Lambda B}$, $\overset{\frown}{ANB}$ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:*



i) ΡΑ = ΡΒ.	Σ	Λ
ii) Η ΡΚ διέρχεται από το Ο.	Σ	Λ
iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν.	Σ	Λ
iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$.	Σ	Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.*

2. *Δίνεται κύκλος (Ο,ρ), μία διάμετρός του ΑΒ και οι εφαπτόμενες ε_1, ε_2 του κύκλου στα Α,Β. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις ε_1, ε_2 στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $\Gamma\hat{O}\Delta = 90°$.*

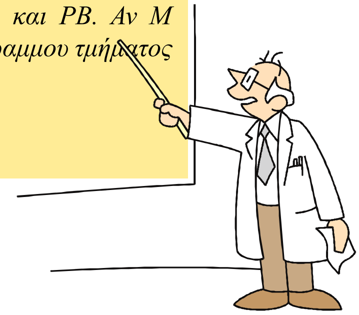
3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (Ο,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΡΒ.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.*

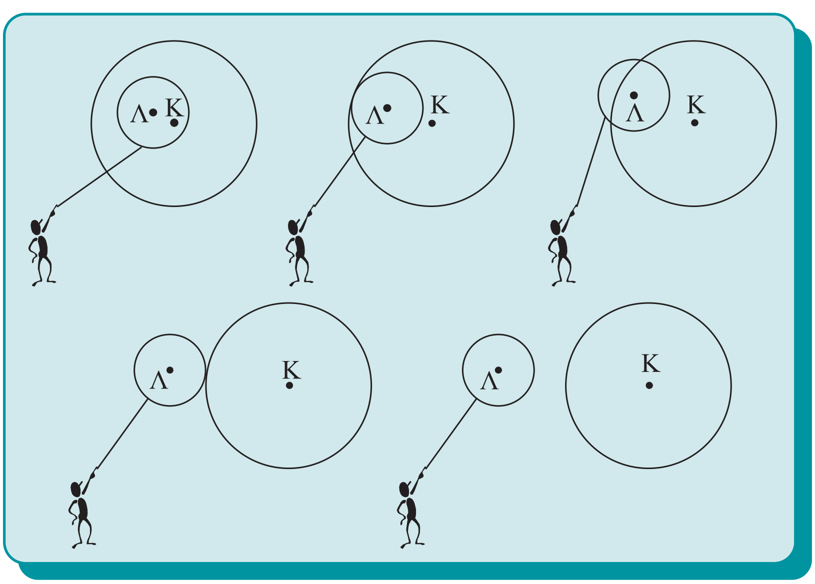
2. *Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (Ο,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι τριπλάσια της $B\hat{M}\Gamma$.*

3. *Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τμήματος ΟΡ να αποδείξετε ότι $M\hat{A}P = M\hat{B}P$.*



3.16 Σχετικές θέσεις δύο κύκλων

Θεωρούμε δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) με $R \geq \rho$. Οι σχετικές τους θέσεις φαίνονται στο παρακάτω σχήμα (σχ.61α).

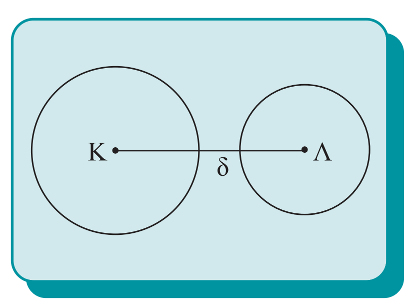


Σχήμα 61α

Το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα κέντρα δύο κύκλων λέγεται ***διάκεντρος*** των δύο κύκλων και συμβολίζεται με δ (σχ. 61β). Οι σχετικές θέσεις δύο κύκλων εξαρτώνται από τη σχέση της διακέντρου με το άθροισμα ή τη διαφορά των ακτίνων τους. Διακρίνουμε τις παρακάτω περιπτώσεις:

• **Κύκλοι χωρίς κοινά σημεία**

(i) Ο κύκλος (Λ, ρ) βρίσκεται στο **εσωτερικό** του (Κ, R), αν



Σχήμα 61β