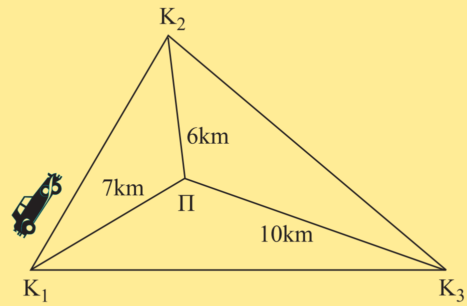
τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. *Τι ισχύει όταν* $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ *ή* $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:*
i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,
ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$,
iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος* δ_α *τέμνει κάθετα τη διάμεσο* μ_β, *να αποδείξετε ότι:*
i) ΑΓ = 2ΑΒ,
ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. *Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ *να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.*

7. *Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.*
i) Να αποδείξετε ότι

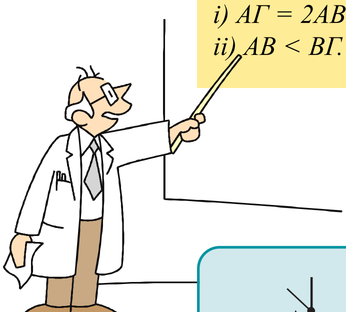
$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

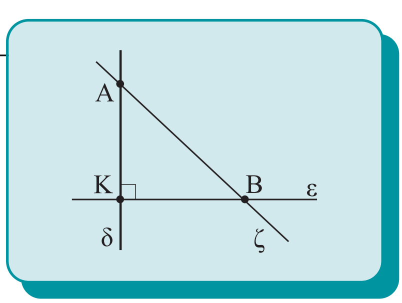
2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:*
i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,
ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ *διέρχεται από το σημείο Α.*

3. *Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*
i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,
ii) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΓΔ και ΑΓ+ΒΔ>ΑΔ+ΒΓ,
iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. *Στο εσωτερικό ορθής γωνίας* $x\hat{O}y$ *θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.*



3.13 Κάθετες και πλάγιες

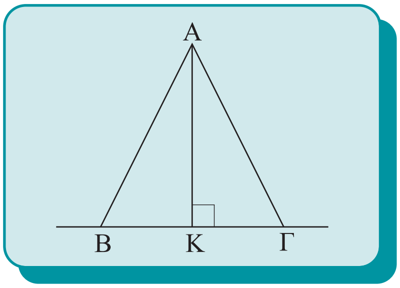


Σχήμα 54

Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ***ίχνος*** της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.

Θεώρημα Ι

Αν δύο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.



Σχήμα 55

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.

Αντίστροφα. Έστω ότι ΚΒ = ΚΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

(i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

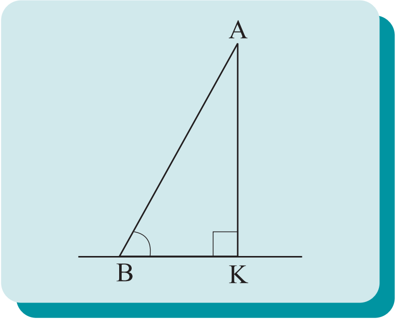
(ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος ΙΙ, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας.

Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, ΑΒ > ΑΚ.



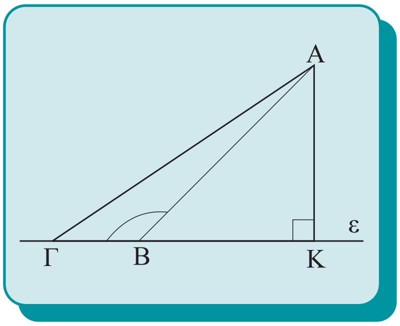
Σχήμα 56

(ii) Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε (σχ.57).

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ.

Ας υποθέσουμε ότι ΚΓ > ΚΒ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $A\hat{B}\Gamma > \hat{K} = 1∟$, δηλαδή η $A\hat{B}\Gamma$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $A\hat{B}\Gamma$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΑΓ>ΑΒ.

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αν ήταν ΚΓ = ΚΒ, τότε θα είχαμε ΑΓ = ΑΒ, που είναι άτοπο. Αν ΚΓ < ΚΒ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι ΑΓ < ΑΒ, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως ΚΓ > ΚΒ.



Σχήμα 57

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. *Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες*

i) ΑΒ=ΑΓ⇔ ....

ii) ΑΒ>ΑΓ⇔................

2. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.*

i) ΑΒ>ΑΚ	*Σ*	*Λ*
ii) ΑΒ=ΑΚ	*Σ*	*Λ*
iii) ΑΒ<ΑΚ	*Σ*	*Λ*

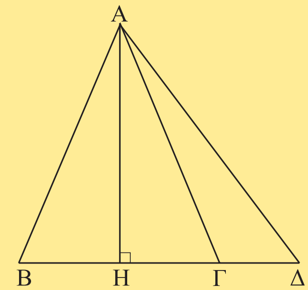
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Δ, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:*

i) ΔΕ < ΕΒ,

ii) ΔΕ < ΒΓ.

2. *Στο παρακάτω σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.*



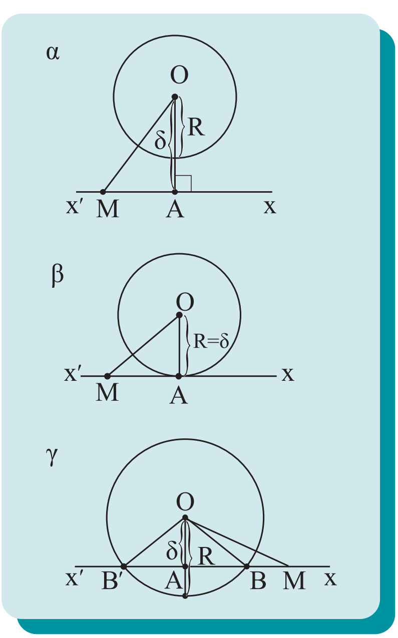
3. *Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.*

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου



Σχήμα 58

Θεωρούμε έναν κύκλο (Ο,R) μια ευθεία x′x και την απόσταση δ = ΟΑ του κέντρου Ο από την x′x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

• Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το Α είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο Μ της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού ΟΜ > ΟΑ > R. Επομένως, η x′x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εξωτερική*** ευθεία του κύκλου.

• Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x′x είναι εξωτερικό σημείο του (Ο,R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x′x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται ***εφαπτομένη*** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται ***σημείο επαφής*** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x΄x εφάπτεται του κύκλου (Ο,R) στο σημείο Α. Είναι φανερό ότι: