ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Σ Λ

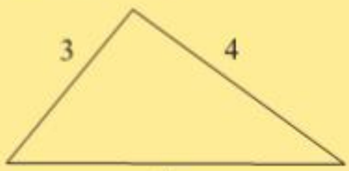
iv) Αν $β > γ$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

v) Αν $β = γ$ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. *Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:*

α. $α = 7$ β. $α=1$ γ. $1<α<7$ δ. $α>7$ ε. $0<α<1$

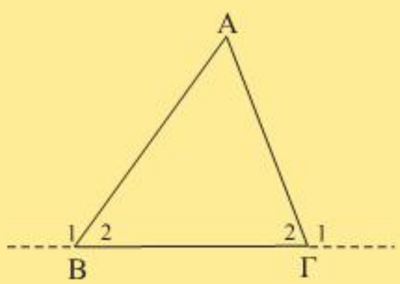
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. *Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $α = \frac{γ}{3}$ και $β = \frac{3γ}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{Γ}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.*



2. *Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{Γ}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=\hat{Γ}$. i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$; ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{Δ}Γ$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}Γ$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.*

5. *Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.*

7. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.*

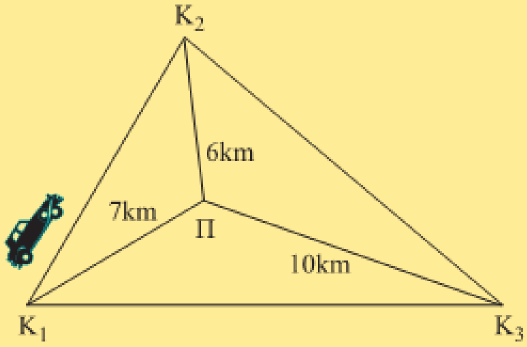
8. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.*

9. *Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

10. *Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1K_2K_3K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή* τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta + \gamma}{2}$,

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:

i) ΑΓ = 2ΑΒ,

ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.

7. Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.

3. Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΓΔ και ΑΓ+ΒΔ>ΑΔ+ΒΓ,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Οy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.