ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων:* Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.

2. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο. Αν Α', Β', Γ' είναι τα συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς το κέντρο Ο αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι συμμετρικά ως προς το Ο και ίσα.*

3. *Αν $x'\hat{A}'y'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί ότι $x'\hat{A}'y' = x\hat{A}y$.*

4. *Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.*

5. *Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.*

6. *Έστω ε, ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο Ο και ένα τυχαίο σημείο Μ. Αν Μ' είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ" το συμμετρικό του Μ' ως προς ε', τότε να αποδείξετε ότι:*
i) ΟΜ = ΟΜ",
ii) τα σημεία Μ, Ο, Μ" είναι συνευθειακά.

Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

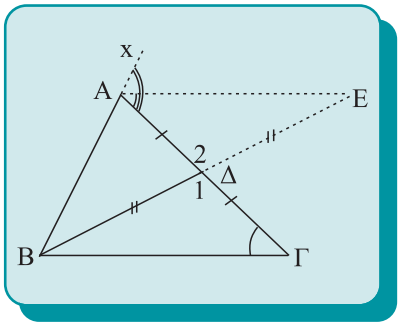
3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{εξ}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: ΒΔ = ΔΕ, ΑΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε $\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{εξ}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{εξ} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{εξ} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

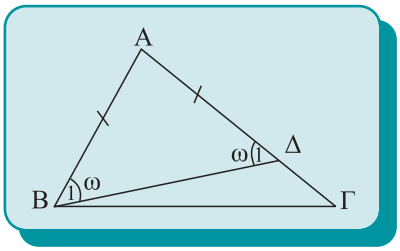
(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.



Σχήμα 48

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\beta > \gamma$ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ=ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$, ενώ η $\hat{\Delta}_1$, ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί αν ήταν $\beta = \gamma$ ή $\beta < \gamma$ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το διπλανό πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος Ι της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

ΠΟΡΙΣΜΑΤΑ

(i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.

(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.

(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

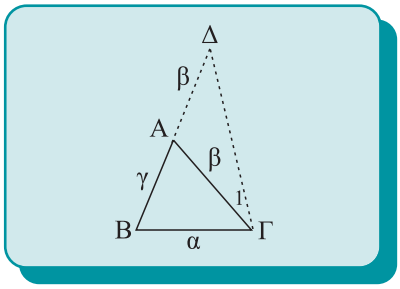
Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $\alpha < \beta + \gamma$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α, κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΓΑ εσωτερική ημιευθεία της $B\hat{\Gamma}\Delta$, οπότε έχουμε αντίστοιχα $\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι ΒΓ < ΒΔ ή $\alpha < \beta + \gamma$.



Σχήμα 49

Όμοια προκύπτει ότι $\beta < \gamma + \alpha$ και $\gamma < \alpha + \beta$. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι $\alpha > \beta - \gamma$, αν $\beta \geq \gamma$ ή $\alpha > \gamma - \beta$, αν $\gamma \geq \beta$, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

$$\boldsymbol{\beta - \gamma < \alpha < \beta + \gamma, \ \beta \geq \gamma}$$

ΠΟΡΙΣΜΑ

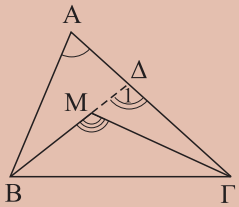
Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(i) $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$

(ii) ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ +ΑΓ.



Σχήμα 50

Απόδειξη

(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία ΒΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως $B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$. Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι $\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$. Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

(ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΓΔ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$MB + M\Delta < AB + A\Delta \text{ και } M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$$MB + M\Delta + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) + M\Delta \text{ ή } MB + M\Gamma < AB + A\Gamma.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

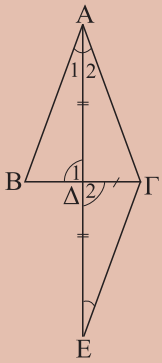
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.



Σχήμα 51

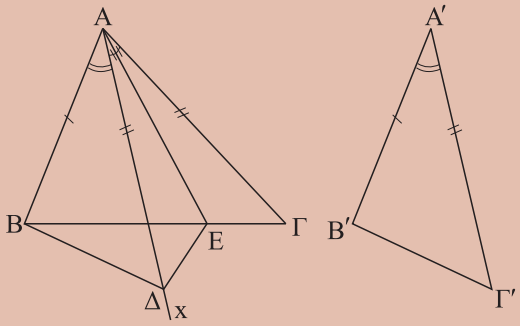
Λύση

Έστω ΑΔ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.51). Προ-

εκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα (ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΔΕ, $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα ΑΒ = ΓΕ (1) και $\hat{A}_1 = \hat{E}$. Από την $\hat{A}_1 = \hat{E}$ προκύπτει ΑΓ = ΓΕ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \hat{E}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΒ=ΑΓ. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.



Σχήμα 52

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ με ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} > \hat{A}'$ (σχ.55).

Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > Β′Γ′. Αφού $\hat{A} > \hat{A}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αx της $\hat{A}$ τέτοια, ώστε $B\hat{A}x = \hat{A}'$. Πάνω στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, ώστε ΑΔ = Α′Γ′. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α′Β′Γ′ είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, ΒΔ = Β′Γ′. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα ΕΔ = ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι

ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ ή ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ ή Β′Γ′ < ΒΓ.

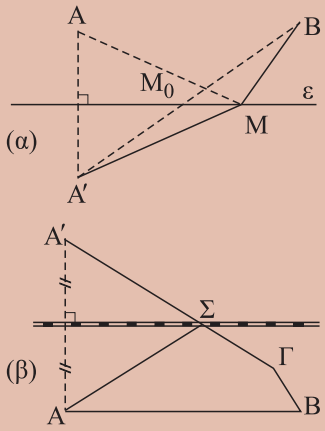
Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ είναι ΑΒ = Α′Γ′, ΑΓ = Α′Γ′ και ΒΓ > Β′Γ′. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι ΒΓ = Β′Γ′, ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι Β′Γ′ < ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α′ του Α ως προς την ε (Σχ.53α).

(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β. Πότε το άθροισμα ΜΑ+ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;

(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;



Σχήμα 53

Λύση

(i) Επειδή το Α′ είναι συμμετρικό του Α ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του ΑΑ′, οπότε ΜΑ = ΜΑ′ και επομένως ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ (1). Αν το Μ δεν είναι σημείο του τμήματος Α′Β από το τρίγωνο ΜΑ′Β, έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ > Α′Β (2), ενώ αν το Μ είναι

σημείο του Α′Β′ έχουμε ΜΑ′ + ΜΒ = Α′Β (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΜΑ + ΜΒ = ΜΑ′ + ΜΒ ≥ Α′Β και ότι το ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α′Β, όταν $M = M_0$, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α′Β.

(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. *Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:*

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{Γ}$. Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°. Σ Λ

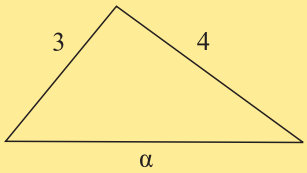
iv) Αν β > γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

v) Αν β = γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα. Σ Λ

2. *Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:*

α. α = 7 β. α=1 γ. 1<α<7 δ. α>7 ε. 0<α<1

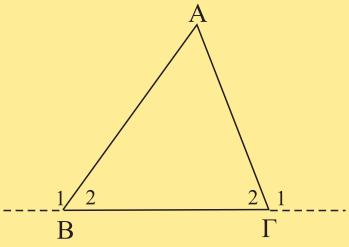
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. *Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $α = \frac{γ}{3}$ και $β = \frac{3γ}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.*

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{Γ}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.*



2. *Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{Γ}$, να αποδείξετε ότι ΑΔ = ΓΔ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΔ;*

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}=\hat{Γ}$. i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$; ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.*

4. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{Δ}Γ$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}Γ$, αν το σημείο Δ βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.*

5. *Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.*

6. *Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ =90°), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Γ}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Δ. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΔΒ.*

7. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.*

8. *Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ τέμνονται στο σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.*

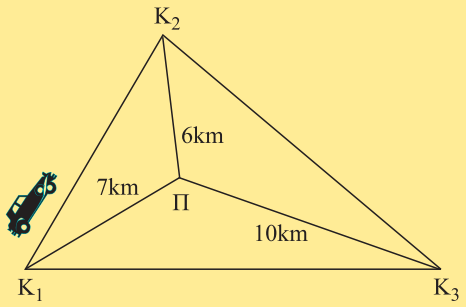
9. *Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της $\hat{A}$.

10. *Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1K_2K_3K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή*

τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. *Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει* $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, *να αποδείξετε ότι* $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. *Τι ισχύει όταν* $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$ *ή* $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι* $A\hat{M}\Gamma > A\hat{M}B$.

3. *Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:*

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\frac{\beta-\gamma}{2} < \mu_\alpha < \frac{\beta+\gamma}{2}$,

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$.

4. *Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι* $\Sigma A \le \Sigma M \le \Sigma B$. *(Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).*

5. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος* δ_α *τέμνει κάθετα τη διάμεσο* μ_β, *να αποδείξετε ότι:*

i) ΑΓ = 2ΑΒ,

ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. *Έστω κύκλος (Ο,R) και δύο τόξα* $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. *Αν* $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ *να αποδείξετε ότι ΑΒ < 2ΓΔ.*

7. *Σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.*

Σύνθετα Θέματα

1. *Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.*

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}.$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα ΟΑ + ΟΒ + ΟΓ + ΟΔ γίνεται ελάχιστο;

2. *Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:*

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ *διέρχεται από το σημείο Α.*

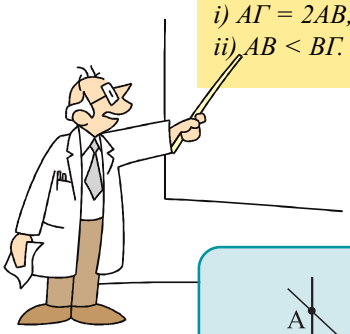
3. *Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:*

i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ+ΒΔ>ΑΒ+ΓΔ και ΑΓ+ΒΔ>ΑΔ+ΒΓ,

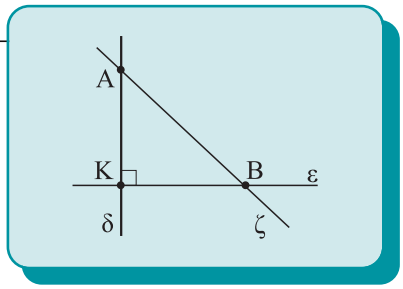
iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. *Στο εσωτερικό ορθής γωνίας* $x\hat{O}y$ *θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Ox, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.*



3.13 Κάθετες και πλάγιες

Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ***ίχνος*** της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.



Σχήμα 54