

## Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$(x-a)(x-\beta)+(y-\gamma)(y-\delta)=0$$

παριστάνει τον περιγεγραμμένο κύκλο του τετραπλεύρου με κορυφές τα σημεία  $A(\alpha,\gamma)$ ,  $B(\beta,\gamma)$ ,  $\Gamma(\beta,\delta)$ ,  $\Delta(\alpha,\delta)$  και ότι οι  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  είναι διάμετροι αυτού του κύκλου.

2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία  $x\sigma\upsilon\nu\varphi+y\eta\mu\varphi=4\eta\mu\varphi-2\sigma\upsilon\nu\varphi+4$  εφάπτεται του κύκλου  $x^2+y^2+4x-8y+4=0$ .

3. Από ένα σημείο  $M_0(x_0,y_0)$  εκτός του κύκλου  $x^2+y^2=\rho^2$  φέρνουμε τις δύο εφαπτόμενες του. Αν  $M_1, M_2$  είναι τα σημεία επαφής, να αποδείξετε ότι η χορδή  $M_1M_2$  έχει εξίσωση  $xx_0+yy_0=\rho^2$ .

4. Έστω  $C$  ο κύκλος που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και διέρχεται από το σημείο  $A(3\alpha,0)$ . Έστω επιπλέον  $M$  ένα σημείο του  $C$ . Να αποδείξετε ότι όταν το  $M$  διαγράφει τον  $C$ , τότε το κέντρο βάρους  $G$  του τριγώνου  $OAM$  διαγράφει τον κύκλο  $(x-a)^2+y^2=a^2$ .

5. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , από τα οποία οι εφαπτόμενες προς τον κύκλο  $x^2+y^2=\rho^2$  είναι κάθετες.

6. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , των οποίων ο λόγος των αποστάσεων από τα σημεία  $A(-3,0)$  και  $B(3,0)$  είναι σταθερός και ίσος με 2.

7. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων  $M$ , των οποίων το τετράγωνο της απόστασης από την αρχή των αξόνων είναι ίσο με το τετραπλάσιο της απόστασης από την ευθεία  $x=1$ .

8. Έστω το τρίγωνο με κορυφές  $A(3,5)$ ,  $B(2,-4)$  και  $\Gamma(-5,-1)$ . Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων  $M$  για τα οποία ισχύει  $MA^2+MB^2+M\Gamma^2=107$  είναι κύκλος με κέντρο το κέντρο βάρους του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

9. Να αποδείξετε ότι καθώς το  $\theta$  διαγράφει το διάστημα  $[0,2\pi)$ , το σημείο τομής των ευθειών

$$x\sigma\upsilon\nu\theta+y\eta\mu\theta=a \quad \text{και} \quad x\eta\mu\theta-y\sigma\upsilon\nu\theta=\beta$$

διαγράφει τον κύκλο

$$x^2+y^2=a^2+\beta^2.$$

10. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των μέσων των χορδών του κύκλου  $x^2+y^2=25$ , που διέρχονται από το σημείο  $A(2,4)$ .