

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η θερμοκρασία T ενός σώματος, που περιβάλλεται από ένα ψυκτικό υγρό, ελαττώνεται με ρυθμό $-kae^{-kt}$, όπου a , k είναι θετικές σταθερές και t ο χρόνος. Η αρχική θερμοκρασία $T(0)$ του σώματος είναι $T_0 + a$, όπου T_0 η θερμοκρασία του υγρού η οποία με κατάλληλο μηχάνημα διατηρείται σταθερή. Να βρείτε τη θερμοκρασία του σώματος τη χρονική στιγμή t .
2. Ένας βιομήχανος, ο οποίος επενδύει x χιλιάδες ευρώ στη βελτίωση της παραγωγής του εργοστασίου του, αναμένει να έχει κέρδος $P(x)$ χιλιάδες ευρώ από αυτή την επένδυση. Μια ανάλυση της παραγωγής έδειξε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κέρδους $P(x)$, που οφείλεται στην επένδυση αυτή, δίνεται από τον τύπο $P'(x) = 5,8 e^{-x/2000}$. Να βρείτε το συνολικό κέρδος που οφείλεται σε αύξηση της επένδυσης από 4.000.000 ευρώ σε 6.000.000 ευρώ.
3. Από την πώληση ενός νέου προϊόντος μιας εταιρείας διαπιστώθηκε ότι ο ρυθμός μεταβολής του κόστους $K(t)$ δίνεται από τον τύπο $K'(t) = 800 - 0,6t$ (σε ευρώ την ημέρα), ενώ ο ρυθμός μεταβολής της εισπραξης $E(t)$ στο τέλος των t ημερών δίνεται από τον τύπο $E'(t) = 1000 + 0,3t$ (σε ευρώ την ημέρα). Να βρείτε το συνολικό κέρδος της εταιρείας από την τρίτη έως και την έκτη ημέρα παραγωγής.
4. Έστω f, g δύο συναρτήσεις με $f(0) = g(0)$, $f(1) = g(1) + 1$ και $f''(x) = g''(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:
 - i) $f(x) = g(x) + x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
 - ii) Αν η συνάρτηση g έχει δύο ρίζες α, β με $\alpha < 0 < \beta$, τότε η συνάρτηση f έχει μια τουλάχιστον, ρίζα στο (α, β) .