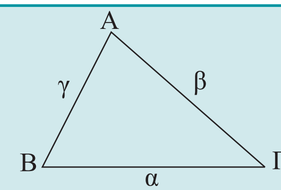
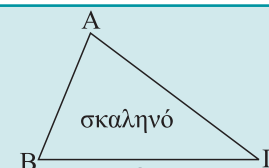
3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

Ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τρεις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$. Για ευκολία οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ με $\hat{A}$, $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται ***κύρια στοιχεία*** του τριγώνου. Το άθροισμα $\alpha + \beta + \gamma$ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ. Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο.Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:

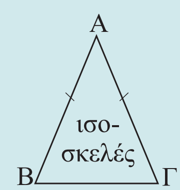


Σχήμα 1

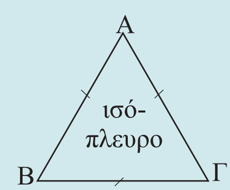
- ***σκαληνό***, όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- ***ισοσκελές***, όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται ***βάση*** του και το Α ***κορυφή*** του,
- ***ισόπλευρο***, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).



Σχήμα 2



Σχήμα 3

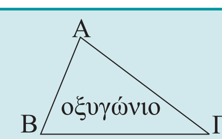


Σχήμα 4

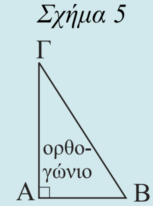
Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται
- ***οξυγώνιο***, όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- ***ορθογώνιο***, όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται ***υποτείνουσα*** και οι άλλες δύο λέγονται ***κάθετες πλευρές*** του τριγώνου,
- ***αμβλυγώνιο***, όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με μ_α. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με μ_β και μ_γ αντίστοιχα.

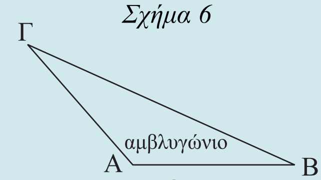


Σχήμα 5

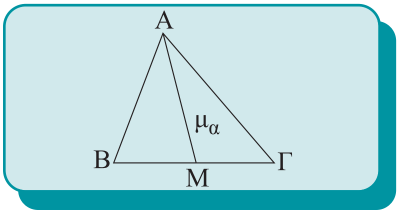


Σχήμα 6

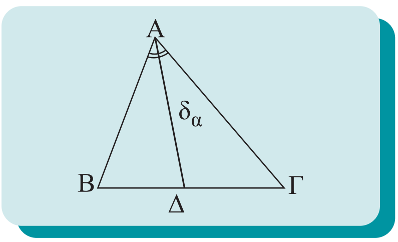
Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ του τριγώνου και συμβολίζεται με δ_α. Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ του τριγώνου συμβολίζονται με δ_β και δ_γ αντίστοιχα.



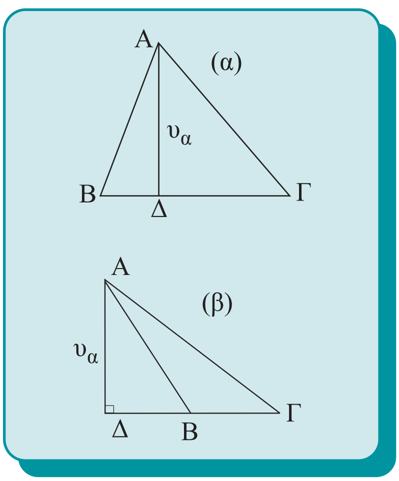
Σχήμα 7



Σχήμα 8

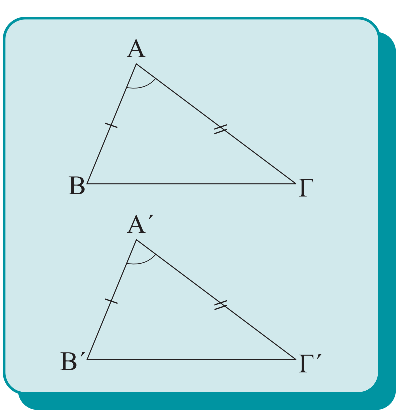


Σχήμα 9



Σχήμα 10

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.



Σχήμα 11

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με υ_α, υ_β και υ_γ.

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται ***προβολή*** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και ***ίχνος*** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.

Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρίγωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται ***αντίστοιχες*** ή ***ομόλογες***.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλίζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο – ΠΓΠ)

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α′Β′Γ′ έχουν ΑΒ = Α′Β′, ΑΓ = Α′Γ′ και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α′Β′Γ′, ώστε το σημείο Α′ να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α΄Β΄ να ταυτιστεί με την ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α΄Γ΄ θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α′Β′ και ΑΓ = Α′Γ′, το σημείο Β′ ταυτίζεται με το Β και το Γ′ με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.

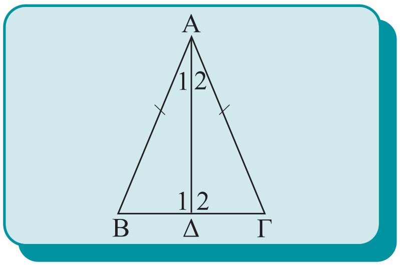
Πορισμα I

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

- **Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.**
- **Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.**

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ (σχ.12).
Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.
Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180°$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90°$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

Πορισμα II

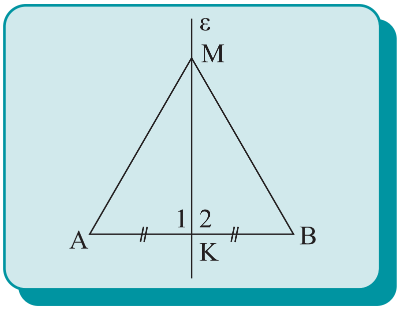
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Πορισμα III

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ=ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ.



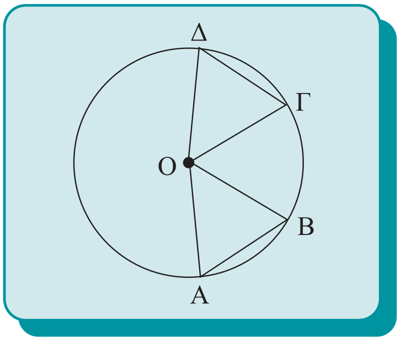
Σχήμα 13

Πορισμα IV

Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.14). Τότε είναι $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και $A\hat{O}B = \Gamma\hat{O}\Delta$. Επομένως είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΓΔ.



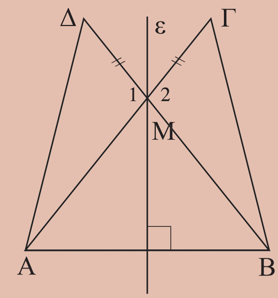
Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

(i) $M\hat{A}B = M\hat{B}A$,

(ii) ΑΔ = ΒΓ.



Σχήμα 15

Λύση

(i) Επειδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ είναι ΜΑ = ΜΒ, επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

(ii) Τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΒΓ έχουν ΜΑ = ΜΒ, ΜΓ = ΜΔ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. *Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΔ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ, ώστε $B\hat{A}\Delta = \Gamma\hat{A}E$. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΔ.*

2. *Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.*

3. *Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.*

4. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η διχοτόμος της $\hat{A}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $A\hat{\Gamma}E = A\hat{Z}B$.*

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. *Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ θεωρήσουμε τμήματα ΚΔ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $E\hat{\Delta}Z = B\hat{A}\Gamma$.*

2. *Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ. Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.*

3. *Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $O\hat{\Gamma}A = O\hat{\Delta}B$.*