

...ΔΥΟ «ΕΝΔΙΑΦΕΡΟΝΤΑ» ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ!

Εφαρμογή: Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα:

$$\text{i)} \quad I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} \quad \text{ii)} \quad I_3 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3}$$

Λύση:

✎ Σκοπός μας είναι η μείωση της δύναμης του παρονομαστή. Γι' αυτό το λόγο εμφανίζουμε τον παρονομαστή στον αριθμητή και στη συνέχεια εφαρμόζουμε την παραγοντική μέθοδο. Συγκεκριμένα έχουμε:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx \end{aligned} \quad (1)$$

Βρίσκουμε την παράγουσα συνάρτηση της $g(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^2}$ για να εφαρμόσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση στο τελευταίο ολοκλήρωμα.

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + a^2)'}{(x^2 + a^2)^2} dx = -\frac{1}{2(x^2 + a^2)}$$

Συνεπώς η σχέση (1) γίνεται:

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{1}{a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{1}{a^2} \int x \left(\frac{-1}{2(x^2 + a^2)} \right)' dx = \\ &= \frac{1}{a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^2} \int (x)' \frac{1}{x^2 + a^2} dx \\ &= \frac{1}{a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} - \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \end{aligned}$$

Άρα

$$I_2 = \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} \quad (2.12)$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα I_3 ακολουθούμε ακριβώς την ίδια λογική με το προηγούμενο και αναγόμεν στο ολοκλήρωμα I_2 . Δηλαδή:

$$\begin{aligned} I_3 &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 + x^2 - x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{a^2} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^3} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} I_2 - \frac{1}{a^2} \int x \frac{x}{(x^2 + a^2)^3} dx \end{aligned} \quad (2)$$

Για την συνάρτηση $\Phi(x) = \frac{x}{(x^2 + a^2)^3}$ βρίσκουμε την παράγουσά της,

δηλαδή:

$$\int \frac{x}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int \frac{(x^2 + a^2)'}{(x^2 + a^2)^3} dx = \frac{1}{2} \int (x^2 + a^2)^{-3} d(x^2 + a^2) = -\frac{1}{4(x^2 + a^2)^2}$$

Έτσι μπορούμε στη σχέση (2) να εφαρμόσουμε την παραγοντική ολοκλήρωση:

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{a^2} I_2 + \frac{1}{4a^2} \int x \left(\frac{1}{(x^2 + a^2)^2} \right)' dx = \\ &= \frac{1}{a^2} I_2 + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{4a^2} \int (x)' \frac{1}{(x^2 + a^2)^2} dx = \\ &= \frac{1}{a^2} I_2 + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} - \frac{1}{4a^2} I_2 = \frac{3}{4a^2} I_2 + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2} \end{aligned}$$

Τέλος από τη σχέση (2.12) της προηγούμενης σελίδας, παίρνουμε:

$$I_3 = \frac{3}{4a^2} \left[\frac{1}{2a^3} \arctan\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x}{2a^2(x^2 + a^2)} \right] + \frac{x}{4a^2(x^2 + a^2)^2}$$