

### Άσκηση 1.18

---

Αν οι αριθμοί  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  είναι θετικοί και ισχύει  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 \cdot \dots \cdot \alpha_n = 1$

τότε αποδείξτε ότι  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \geq n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ,

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 1$ .

---

#### Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Η σχέση ισχύει για  $n=1$ .

Πράγματι αν  $\alpha_1 > 0$  και  $\alpha_1 = 1$  τότε η  $\alpha_1 \geq 1$  ισχύει ως ισότητα.

Έστω ότι για  $n = n$  ισχύει ότι

αν  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n > 0$  με  $\gamma_1 \cdot \gamma_2 \cdot \dots \cdot \gamma_n = 1$

τότε  $\gamma_1 + \gamma_2 + \dots + \gamma_n \geq n$ .

Θα δείξω ότι για  $n = n+1$  ισχύει ότι

αν  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \beta_{n+1} > 0$  με  $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_{n+1} = 1$

τότε  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1} \geq n+1$  (1)

Εάν  $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \beta_{n+1} = 1$  τότε  $\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1} = n+1$ . Έστω  $\beta_i > 1$  για κάποιο  $i$ ,  
επειδή  $\beta_1 \cdot \beta_2 \cdot \dots \cdot \beta_n \cdot \beta_{n+1} = 1$  τότε υπάρχει  $\beta_j < 1$  για κάποιο  $j$ .

Δε βλάπτει τη γενικότητα να υποθέσουμε ότι  $\beta_1 > 1$  και  $\beta_2 < 1$ .

Τότε αφού  $\beta_1 \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_{n+1} > 0$

και  $(\beta_1 \beta_2) \cdot \beta_3 \cdot \dots \cdot \beta_{n+1} = 1$

θα ισχύει (από το επαγωγικό βήμα για  $n = n$ )

$\beta_1 \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1} \geq n$

Άρα αν δείξω ότι

$\beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1} \geq 1 + (\beta_1 \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1})$  (2)

η (1) θα έχει αποδειχθεί αφού  $1 + (\beta_1 \beta_2 + \beta_3 + \dots + \beta_n + \beta_{n+1}) \geq 1 + n$

Για να δείξω την (2) αρκεί  $\beta_1 + \beta_2 \geq 1 + \beta_1\beta_2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \beta_1 + \beta_2 - 1 - \beta_1\beta_2 \geq 0 \Leftrightarrow \beta_1(1 - \beta_2) + \beta_2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (1 - \beta_2)(\beta_1 - 1) \geq 0 \text{ που ισχύει αφού υπέθεσα ότι } \beta_1 > 1 \text{ και } \beta_2 > 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.