

Άσκηση 1.17

Αποδείξτε ότι $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$

Ισχύει ότι

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \frac{n^n}{(n-1)!}.$$

Απόδειξη

Α Τρόπος (με επαγωγή)

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή

Παρατηρώ ότι για $n = 2$ ισχύει $\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 = \frac{2^2}{1!}$

Έστω ότι για $n = v$ ισχύει η σχέση

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{v-1}\right)^v = \frac{v^v}{(v-1)!}$$

Θα αποδείξω ότι η σχέση ισχύει και για $n = v + 1$

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{v-1}\right)^v \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} = \frac{(v+1)^{v+1}}{v!}$$

Πράγματι χρησιμοποιώντας το επαγωγικό βήμα για $n = v$ έχω:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{v-1}\right)^v \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} &= \frac{v^v}{(v-1)!} \cdot \left(1 + \frac{1}{v}\right)^{v+1} = \\ &= \frac{v^v \cdot (v+1)^{v+1}}{(v-1)! \cdot v^{v+1}} = \frac{(v+1)^{v+1}}{(v-1)! \cdot v} = \frac{(v+1)^{v+1}}{v!} \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Β' Τρόπος

$$\left(1 + \frac{1}{1}\right)^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^3 \cdots \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n =$$

$$= \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right)^1 \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \right] \left[\left(1 + \frac{1}{1}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \right] =$$

$$= \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \cdot \left[\frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \dots \cdot \frac{n}{n-1} \right] = \frac{n^{n-1}}{(n-1)!} \cdot n = \frac{n^n}{(n-1)!} \quad (\text{από άσκηση 16})$$