Άσκηση 1.16

Αποδείξτε ότι $\forall n \in /N - \{0,1\}$ ισχύει

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}$$

<u>Απόδειξη</u>

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή.

Παρατηρώ ότι για $n=2$ ισχύει $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}=\frac{2^{1}}{1!}$

Έστω ότι για $n=\nu$ ισχύει $\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}=\frac{\nu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}$.

Θα δείξω ότι για $n=\nu+1$ ισχύει η σχέση

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{(\nu+1)^{\nu}}{\nu!}.$$

Πράγματι χρησιμοποιώντας τη σχέση για $n=\nu$ έχω

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)^{1}\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)^{2}\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{1}{\nu-1}\right)^{\nu-1}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=\frac{\nu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot\left(1+\frac{1}{\nu}\right)^{\nu}=$$

$$=\frac{\nu^{\nu-1}}{(\nu-1)!}\cdot\frac{(1+\nu)^{\nu}}{\nu^{\nu}}=\frac{(1+\nu)^{\nu}}{(\nu-1)!\cdot\nu}=\frac{(1+\nu)^{\nu}}{\nu!}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.