

Άσκηση 1.15

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $0 < \alpha < \frac{1}{n}$ αποδείξτε ότι ισχύει $(1 + \alpha)^n < \frac{1}{1 - n\alpha}$

Απόδειξη

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή

$$\text{Για } n=1 \quad (1 + \alpha)^1 < \frac{1}{1 - \alpha}.$$

Η σχέση ισχύει $0 < \alpha < 1$

$$\text{Πράγματι, } 1 + \alpha < \frac{1}{1 - \alpha} \Leftrightarrow (1 + \alpha)(1 - \alpha) < 1 \quad (\text{αφού } 1 - \alpha > 0)$$

$$\Leftrightarrow 1 - \alpha^2 < 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\alpha^2 < 0 \quad \text{που ισχύει.}$$

Υποθέτω ότι η σχέση ισχύει για $n = \nu$

$$(1 + \alpha)^\nu < \frac{1}{1 - \nu\alpha} \quad 0 < \alpha < \frac{1}{\nu}.$$

Θα αποδείξω ότι για $n = \nu + 1$ ισχύει η σχέση

$$(1 + \alpha)^{\nu+1} < \frac{1}{1 - (\nu+1)\alpha} \quad \text{όπου } 0 < \alpha < \frac{1}{\nu+1}$$

$$\text{Πράγματι, } (1 + \alpha)^{\nu+1} = (1 + \alpha)^\nu \cdot (1 + \alpha) < \frac{1}{1 - \nu\alpha} \cdot (1 + \alpha) \quad (\text{από το επαγωγικό βήμα και } \alpha + 1 > 0)$$

$$= \frac{1 + \alpha}{1 - \nu\alpha}.$$

$$\text{Αρκεί να δείξω ότι } \frac{1 + \alpha}{1 - \nu\alpha} < \frac{1}{1 - (\nu+1)\alpha}.$$

$$\text{Πολλαπλασιάζοντας τη σχέση αυτή με } (1 - \nu\alpha)(1 - (\nu+1)\alpha) > 0 \quad \left(0 < \alpha < \frac{1}{\nu+1} < \frac{1}{\nu}\right),$$

θα έχω :

$$\begin{aligned}
\frac{1+\alpha}{1-\nu\alpha} &< \frac{1}{1-(\nu+1)\alpha} \Leftrightarrow (1+\alpha) \cdot (1-(\nu+1)\alpha) < 1-\nu\alpha \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1+\alpha-(\nu+1)\alpha-(\nu+1)\alpha^2 < 1-\nu\alpha \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow 1+\alpha-\nu\alpha-\alpha-\nu\alpha^2-\alpha^2-1+\nu\alpha < 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -\nu\alpha^2-\alpha^2 < 0 \Leftrightarrow -\alpha^2(\nu+1) < 0 \text{ που ισχύει.}
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

Σημείωση: Για $0 < \alpha < \frac{1}{\nu}$ η ανισότητα είναι συνέπεια της $(1+\alpha)^n \leq 1+n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2$ διότι

$$1+n\alpha + \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 < \frac{1}{1-\nu\alpha}$$