Τράπεζα θεμάτων Γεωμετρίας Β' Λυκείου

Θέμα 4 **GI_V_GEO_4_22336**

Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά τμήμα ΓΔ=$\frac{\text{ΑΓ}}{2}$. Αν η προέκταση του ύψους ΑΜ, τέμνει την ΒΔ στο Ε, να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{2}{3}$

(Μονάδες 8)

β) $\frac{(\text{ΒΓΕ})}{(\text{ΓΕΔ})}=\frac{2}{3}$

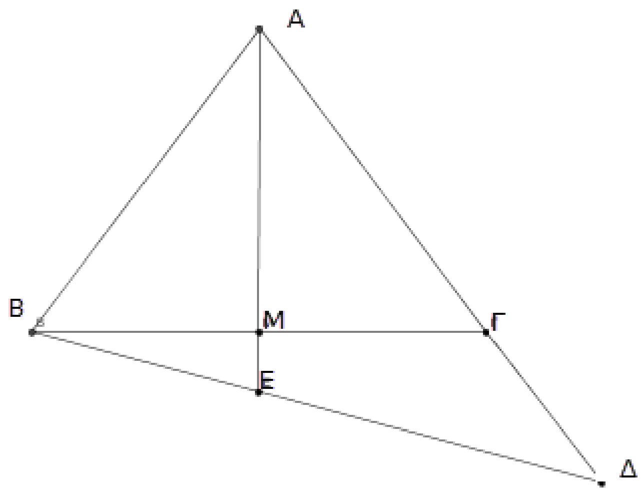
(Μονάδες 9)

γ) $\frac{(\text{ΑΒΔ})}{(\text{ΓΕΔ})}=\frac{5}{2}$

(Μονάδες 8)

Λύση:

α) Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ η ΑΜ είναι ύψος και διάμεσος άρα και διχοτόμος της γωνίας $\hat{\text{Α}}$



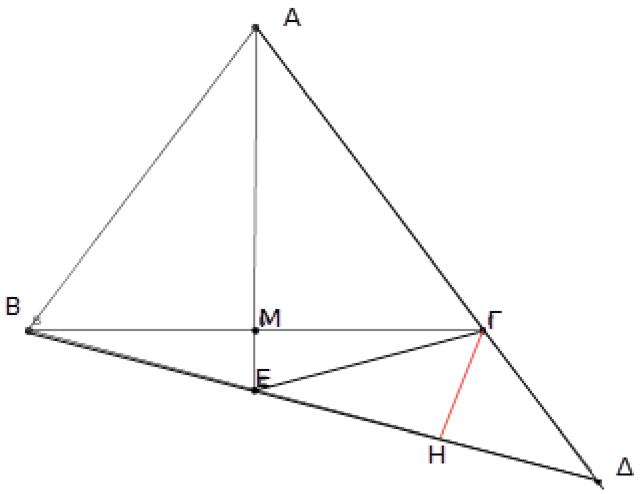
Στο τρίγωνο ΑΒΔ από το θεώρημα της διχοτόμου έχουμε

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΑΔ}}$$

Άρα

$$\frac{\text{ΒΕ}}{\text{ΕΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}+\text{ΓΔ}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΓ}+\frac{\text{ΑΓ}}{2}}=\frac{\text{ΑΓ}}{\frac{3\text{ΑΓ}}{2}}=\frac{2}{3}$$

β) Για τα εμβαδά (ΒΕΓ) και (ΓΕΔ) των τριγώνων ΒΕΓ και ΓΕΔ έχουμε



$$\frac{(\mathrm{ΒΕΓ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{\frac{1}{2}\mathrm{ΒΕ}\cdot\mathrm{ΓΗ}}{\frac{1}{2}\mathrm{ΕΔ}\cdot\mathrm{ΓΗ}}$$

όπου ΓΗ το κοινό ύψος των τριγώνων ΒΕΓ και ΓΕΔ (ΓΗ $\perp$ ΒΔ)

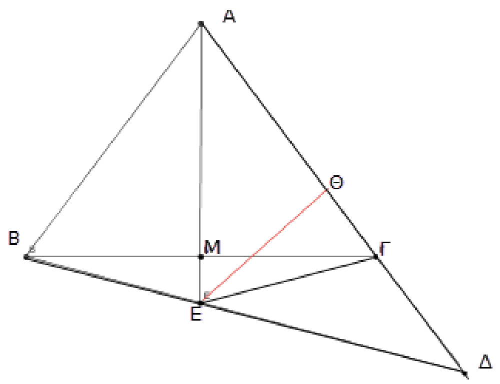
Επομένως $\frac{(\mathrm{ΒΕΓ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{\mathrm{ΒΕ}}{\mathrm{ΕΔ}}=\frac{2}{3}$

γ) Για τα εμβαδά (ΑΒΕ) και (ΑΓΕ) των τριγώνων ΑΒΕ και ΑΓΕ είναι ίσα αφού έχουν κοινή βάση ΑΕ και ίσα ύψη ΒΜ = ΜΓ

Επειδή

(ΑΒΔ) = (ΑΒΕ) + (ΑΕΓ) + (ΓΕΔ) = 2(ΑΕΓ) + (ΓΕΔ)

έχουμε



$$\frac{(\mathrm{ΑΒΔ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{2(\mathrm{ΑΕΓ})+(\mathrm{ΓΕΔ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{2(\mathrm{ΑΕΓ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}+\frac{(\mathrm{ΓΕΔ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}$$

Άρα $\frac{(\mathrm{ΑΒΔ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{2\cdot\frac{1}{2}\mathrm{ΑΓ}\cdot\mathrm{ΕΘ}}{\frac{1}{2}\mathrm{ΓΔ}\cdot\mathrm{ΕΘ}}+1$

όπου ΕΘ το κοινό ύψος των τριγώνων ΑΕΓ και ΓΕΔ (ΕΘ $\perp$ ΑΔ)

Επομένως $\frac{(\mathrm{ΑΒΔ})}{(\mathrm{ΓΕΔ})}=\frac{2\cdot\mathrm{ΑΓ}}{\mathrm{ΓΔ}}+1=\frac{2\cdot2\mathrm{ΓΔ}}{\mathrm{ΓΔ}}+1=4+1=5$

Επιμέλεια: Βασίλης Γκιμίσης – MEd – Μαθηματικός